

Aberrations du premier ordre des systèmes catoptriques asymétriques Application au microscope X à réflexion totale

Par Marc MONTEL, ingénieur E. S. O.

SOMMAIRE. — L'auteur présente une étude détaillée de l'astigmatisme et de la distorsion des systèmes réfléchissants asymétriques, en vue de l'amélioration des résultats obtenus avec le microscope X à réflexion totale. Il indique les diverses possibilités de correction.

ZUSAMMENFASSUNG. — Der Verfasser beschäftigt sich eingehend mit dem Astigmatismus und der Verzeichnung bei asymmetrischen Spiegelsystemen, im Hinblick auf die Verbesserung eines Röntgenstrahlmikroskopes unter Benutzung der Totalreflexion. Es ergeben sich dabei verschiedene Möglichkeiten einer Korrektur dieser Fehler.

SUMMARY. — The author presents a detailed study of astigmatism and distortion of asymmetrical reflecting systems, with special reference to the possibility of improving the results obtained with the total reflection X Rays Microscope. Various possibilities of correction are mentioned.

I. Introduction

La microscopie X a fait ces dernières années d'importants progrès. Actuellement, on distingue les objectifs fonctionnant par réflexion de Laue, et ceux utilisant la réflexion totale des rayons X. Les recherches effectuées par divers expérimentateurs étrangers et nous-même ont montré tout l'intérêt théorique de ces derniers systèmes. Les résultats antérieurs ont été assez décevants. Cela est dû aux aberrations géométriques ; nous avons essayé de les réduire. Ces aberrations sont d'un type particulier : en effet, le système ne présente généralement pas d'éléments de symétrie, et la classification de Nijboer ne s'applique pas. Nous nous limiterons ici aux aberrations du premier ordre : ce sont les seules qu'il soit possible d'étudier par des procédés suffisamment simples. Conformément à la classification générale des aberrations, nous étudierons successivement l'astigmatisme uniforme et la distorsion. Certains de nos résultats ne dépendant pas de l'angle d'incidence, nous ferons l'étude dans le cas général, et nous appliquerons chaque fois nos conclusions au cas de la réflexion sous incidence rasante.

Les miroirs sphériques étant les seuls que nous sachions fabriquer actuellement avec une grande précision et un parfait poli, nous n'envisagerons pas le cas des miroirs déformés.

II. Astigmatisme

1. Généralités.

Nous compterons positivement les segments orientés dans le sens de la lumière sur le rayon lumineux qui le parcourt.

Le plan d'incidence d'un rayon \vec{AO} , est le plan défini par le rayon et la normale \vec{N} au miroir, au point d'incidence (fig. 1). La normale est orientée positive-

ment du côté où se produit la réflexion. L'angle d'incidence i est le supplément de l'angle (\vec{N}, \vec{AO}) , et sera toujours inférieur à 90° . Nous appellerons angle d'attaque ω , le complément de l'angle d'incidence.

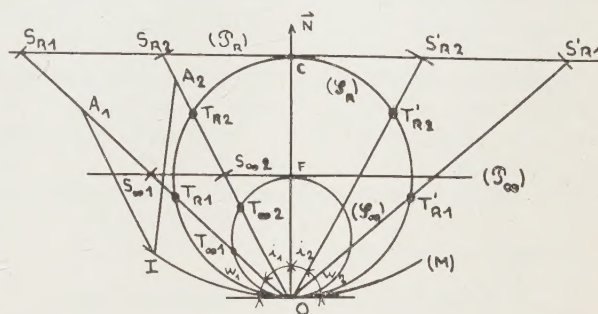


FIG. 1.

La distance du sommet O du miroir, au point d'incidence I d'un rayon quelconque (ouverture linéaire) sera considérée comme un infiniment petit du premier ordre devant la distance AO.

Un pinceau s'appuyant sur deux focales perpendiculaires, une sagittale S et une tangentielle T, s'appuiera après réflexion sur deux focales S' et T'. Ces dénominations supposent défini le plan d'incidence. La position des focales est donnée par les formules :

$$(1) \quad \frac{1}{OS'} = \frac{2 \sin \omega}{OC} + \frac{1}{OS}$$

$$(2) \quad \frac{1}{OT'} = \frac{2}{OC \sin \omega} + \frac{1}{OT}$$

Le cercle de Rowland (\mathcal{S}_R), et le cercle focal (\mathcal{S}_∞) d'un point O d'un miroir sont les cercles de diamètre OC et OF = OC/2, situés dans le plan d'incidence de AO. La droite de Rowland (\mathcal{R}), et la droite focale

(\mathcal{C}_∞) sont les droites parallèles au plan tangent en O, passant par C et F, et situées dans le plan d'incidence. Les points-objets situés sur ces courbes (Γ_n) et (Γ_∞) ont leurs images respectivement sur (Γ_n) et à l'infini. Les cercles sont relatifs aux tangentiellles et les droites aux sagittales.

Soit une suite de miroirs (M_1)..., de centre C_1 ..., Le rayon perpendiculaire au centre O' du diaphragme d'ouverture (D) se réfléchit sur ces miroirs en O_1 ..., et cette suite de segments constitue le pseudo-axe du système. Les points O seront pris comme sommets des miroirs ; le rayon moyen issu d'un point A pris sur le pseudo-axe, sera l'axe lui-même. A sera choisi comme centre du champ. Les angles d'attaque du pseudo-axe seront respectivement u, v, \dots .

Deux miroirs sont dits parallèles quand les focales images d'un point jouent le même rôle par rapport aux deux miroirs : une focale jouant le rôle de sagittale par rapport au premier miroir aura une image, dans le système compris entre les deux miroirs qui jouera également le rôle de sagittale par rapport au second miroir.

Nous appellerons miroirs croisés, deux miroirs consécutifs tels que le plan d'incidence du pseudo-axe sur le premier miroir soit perpendiculaire au plan d'incidence du pseudo-axe sur le second miroir. Les axes de symétrie des deux miroirs ne sont pas perpendiculaires. Le rôle des sagittales et des tangentiellles est alors interverti d'un miroir à l'autre.

D'après les formules (1) et (2), un miroir ne peut être corrigé de l'astigmatisme. Tout système dépourvu de cette aberration devra donc comprendre au moins deux miroirs.

Sauf contre-indication, les miroirs seront concaves.

2. Astigmatisme sur l'axe.

1. Astigmatisme en un point de l'axe.

a. Cas de deux miroirs sous incidence quelconque.

Nous allons en premier lieu chercher à corriger le système de son astigmatisme uniforme. La condition nécessaire pour que la correction soit possible est que les plans d'incidence du rayon moyen issu de A sur les deux miroirs soient perpendiculaires. Dans ces conditions en effet, la sagittale S'_1 , image de A donnée par (M_1) jouera le rôle de tangentielle T_2 par rapport (M_2); de même, T'_1 jouera le rôle de S_2 et la compensation entre les deux astigmatismes sera possible. Il faut donc d'abord que les plans AO_1C_1 et O_1O_2A' (fig. 2)

soient perpendiculaires, c'est-à-dire que les miroirs soient croisés.

Ceci réalisé, les formules de l'astigmatisme nous donnent, pour le premier miroir :

$$\frac{1}{O_1S'_1} = \frac{2 \sin u}{O_1C_1} + \frac{1}{O_1A} \quad \frac{1}{O_1T'_1} = \frac{2}{O_1C_1 \sin u} + \frac{1}{O_1A}$$

et pour le second miroir :

$$\frac{1}{O_2T'_2} = \frac{2}{O_2C_2 \sin v} - \frac{O_1C_1 + 2 O_1A \sin u}{-O_1C_1 \cdot O_1A + O_1O_2(O_1C_1 + 2 O_1A \sin u)}$$

$$\frac{1}{O_2S'_2} = \frac{2 \sin v}{O_2C_2} - \frac{O_1C_1 \sin u + 2 O_1A}{-O_1A \cdot O_1C_1 \sin u + O_1O_2(O_1C_1 \sin u + 2 O_1A)}$$

L'astigmatisme se trouvera corrigé sur l'axe au point A, si les focales sont confondues, c'est-à-dire si $O_2T'_2 = O_2S'_2$. Le point A' se trouvera au point S'_2 (ou T'_2), et il n'y aura pas de défaut de mise au point si le plan récepteur (Π') passe par ce point A'. Nous n'avons pas fait état, dans ce calcul, de la position du diaphragme. *L'astigmatisme uniforme et la mise au point sont indépendants de la position du diaphragme sur le pseudo-axe.*

b. Cas de deux miroirs sous forte incidence : Que se passe-t-il quand la variable u tend vers zéro ? Si nous laissons fixe A sur O_1A et I_1 sur (M_1) (fig. 3), et faisons tourner O_1A et (M_1), pour diminuer u , toutes choses égales d'ailleurs, l'angle de la droite AI'_1 reste constant, alors que l'angle (AI''_1, AO_1) = $\sin u$. $O_1I'_1/O_1A$ va tendre vers zéro avec u . Un phénomène analogue se produira quand v tend à son tour vers zéro. Il s'ensuit que si les ouvertures linéaires O_1I_1 et O_2I_2 sont des infiniment petits du premier ordre ainsi que les angles d'attaque, les ouvertures angulaires seront du second ordre. L'élément qui sert ici de comparaison est la distance AO_1 du centre de l'objet au sommet du

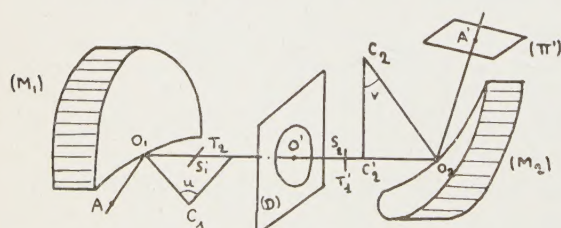


FIG. 2.

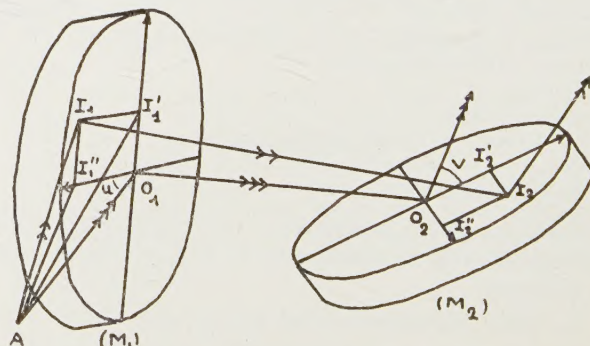


FIG. 3.

premier miroir. Nous choisirons OC de telle manière que les produits $O_1C_1 \cdot \sin u$, $O_2C_2 \cdot \sin v$, et la distance O_1O_2 des deux miroirs soient de l'ordre de grandeur de AO_1 .

Nous pourrions écrire, en négligeant les termes en $\sin u/O_1C_1$, $\sin v/O_2C_2$ et $O_1A \cdot \sin u$, d'un point de vue purement physique :

$$\frac{1}{O_2S'_2 + O_1O_2} = \frac{2}{O_1C_1 \sin u} + \frac{1}{O_1A}$$

$$\frac{1}{O_2T'_2} = \frac{2}{O_2C_2 \sin v} + \frac{1}{O_1A - O_1O_2}$$

Ces formules simplifiées nous montrent que T'_2 ne dépend que de (M_2) , et S'_2 de (M_1) . Un miroir sous incidence rasante ne focalise que les rayons situés dans le plan d'incidence moyen et est sans effet sur les rayons situés dans un plan perpendiculaire. Les deux miroirs étant croisés, chacun d'eux contribue à la focalisation d'une des directions du faisceau.

c. *Systèmes complexes.* — Nous appelons systèmes complexes, les systèmes formés de miroirs croisés et parallèles en nombre indéterminé. Nous appliquerons les formules de l'astigmatisme autant de fois que nécessaire.

Pour les fortes incidences, nous grouperons évidemment entre eux les miroirs parallèles, puisqu'ils n'agissent que sur une même direction du faisceau.

2. Conservation de la correction de l'astigmatisme sur l'axe.

a. Cas de deux miroirs.

1°) Equations. — Soit un couple de points conjugués A_0 et A'_0 , pour lesquels l'astigmatisme a été corrigé en égalant les valeurs des quantités $O_2T'_2 = f(A_0)$ et $O_2S_2 = g(A_0)$, nous avons donc $f - g = 0$. Cherchons s'il existe des points A_0 sur l'axe, tels que pour un petit déplacement A_0A , le long de l'axe, la correction soit conservée. Il faut que $f' - g' = 0$; les focales se déplacent de la même quantité, et restent ainsi confondues. Cela signifie que la valeur A_0 est une racine double de $f - g = 0$. Le calcul conduit à une équation du second degré en O_1A_0 :

$$a.O_1A_0^2 + 2b.O_1A_0 + c = 0$$

Nous devons donc pouvoir mettre cette équation sous la forme d'un carré parfait ce qui nécessite : $ac = b^2$. Le développement des calculs conduit à la formule : $\overline{O_1O_2^2} \cdot \cos^4 u \cdot \cos^4 v =$

$$-\overline{O_1C_1} \overline{O_2C_2} \cdot \sin u \cdot \sin v \cdot \cos^2 u \cdot \cos^2 v.$$

2°) Discussion. — Cette équation est vérifiée quels que soient OC et O_1O_2 pour $u = v = 90^\circ$. C'est le cas, sans intérêt pour nous, des systèmes centrés. Dans les

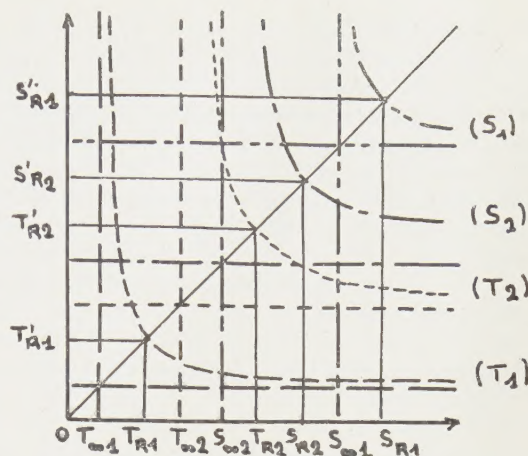


FIG. 4.

autres cas, la relation ne peut être vérifiée que si le produit des rayons est négatif : les deux miroirs doivent donc être de nature différente. Est-il alors toujours possible de corriger l'astigmatisme. Supposons (M_1) concave et (M_2) convexe. Puisque le point A' doit être réel (et O_2A' assez grand pour que le système ait un grandissement intéressant), il faut que (M_1) donne deux focales qui jouent le rôle d'objets virtuels par rapport à (M_2) . En effet, d'après les formules (1) et (2), un miroir convexe donne de tout point réel deux focales virtuelles. Regardons la position des focales données par (M_1) . Il y a deux cas à considérer, suivant que u est inférieur ou supérieur à 45° (fig. 1). Nous indiquons les deux graphiques correspondant aux deux cas de figure (fig. 4). Il faut que O_1O_2 soit inférieur à la plus courte des deux distances positives $O_1S'_1$ et $O_1T'_1$: O_1O_2 doit être inférieur à l'ordonnée du point K , intersection de (T) avec S_∞ . Si cette condition est réalisée, nous pourrions déterminer O_2C_2 en écrivant :

$$\frac{2 \sin v}{O_2C_2} + \frac{1}{O_2T'} = \frac{2}{O_2C_2 \cdot \sin v} + \frac{1}{O_2S'_1}$$

Nous pourrions d'ailleurs prendre d'autres paramètres, et calculer, au lieu du rayon du second miroir, le rayon du premier miroir, les angles d'incidence, ou la distance des miroirs, en fonction des autres données du système. Si O_1O_2 est supérieur à $S_\infty K$, la correction de l'astigmatisme axial est impossible.

3°) Fortes incidences. — Regardons ce qui se passe quand nous faisons tendre u vers zéro : T_R et T_∞ tendent vers zéro, S_R et S_∞ vers l'infini. K tend donc vers l'axe des abscisses ; il sera impossible de trouver une valeur de O_1O_2 compatible avec les données géométriques et donnant des focales qui jouent le rôle d'objets virtuels par rapport à (M_2) . Nous ne pourrions réaliser un système travaillant sous réflexion rasante, composé de deux miroirs de nature différente, et corrigé de l'astigmatisme sur l'axe.

b. Systèmes complexes.

Nous pouvons faire des systèmes corrigés de l'astigmatisme sur l'axe et travaillant sous réflexion rasante en utilisant des systèmes complexes. Nous emploierons en particulier le système formé de deux paires croisées de miroirs parallèles, dont l'un est concave et l'autre convexe. Nous noterons seulement pour le calcul d'un tel système, que chaque couple ne peut être corrigé séparément de l'astigmatisme dès que l'incidence est assez forte : les miroirs du couple donnent des images de nature différente qui ne peuvent par conséquent être amenées en coïncidence. Ce système présente une assez bonne correction des aberrations résiduelles par suite d'une certaine symétrie, et de l'intervention de courbures opposées. Nous ne détaillerons pas cet exemple, car les ouvertures seront supposées assez faibles pour permettre de considérer l'astigmatisme corrigé sur un petit segment de l'axe (profondeur de champ).

3. Astigmatisme dans le champ dans le cas de deux miroirs.

1. Condition géométrique.

Est-il possible de conserver la correction de l'astigmatisme quand le point-objet n'est plus sur l'axe ? Il faut d'abord conserver la perpendicularité des plans d'incidence.

Prenons un point B, dans le plan AO_1O_2 supposé horizontal (fig. 5). Le rayon moyen issu de B est dans ce plan : nous exclurons en effet l'hypothèse sans intérêt où B est le conjugué de P', auquel cas tous les rayons passent par P', et le diaphragme ne joue plus le rôle de diaphragme d'ouverture, mais celui de diaphragme de champ. Le plan d'incidence en I_2 est le

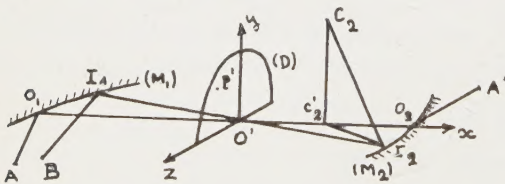


FIG. 5.

plan $I_1I_2C_2$ et doit être perpendiculaire au plan de figure horizontal, c'est-à-dire passer par la verticale de C_2 . I_1I_2 passera par C'_2 , projection orthogonale de C_2 sur l'axe et le diaphragme d'ouverture, ou son image, sera centré en C'_2 . De même, prenons $O_1O_2C_2$ comme plan d'incidence moyen sur le second miroir. Les points B correspondants se projettent verticalement sur AO_1 — à un infiniment petit du premier ordre près par rapport à O_1I_1 , qui est dû à la flèche de la section de front de (M_1) — et leur rayon moyen devra passer par C'_1 . Pour que la perpendicularité soit réalisée dans les deux cas, nous avons trois solutions :

— Confondre C'_1 et C'_2 en un même point O' entre O_1 et O_2 .

— Prendre C'_1 et C'_2 conjugués d'un même point O' .
— Utiliser deux diaphragmes placés respectivement en C'_1 et C'_2 .

a. Points C'_1 et C'_2 confondus en O' .

Il faut que O_1C_1 et O_2C_2 vérifient la relation

$$(C) \quad O_1C_1 \cdot \sin u + O_2C_2 \cdot \sin v = O_1O_2 = O_1C'_1 - O_2C'_2$$

en remarquant que $O_1C_1 \cdot \sin u = O_1C'_1$ et que

$O_2C_2 \cdot \sin v = -O_2C'_2$. Or, C'_1 et C'_2 sont respectivement sur les cercles de Rowland de (M_1) et (M_2) relatifs au rayon moyen de A et A'. Ces deux cercles étant dans des plans perpendiculaires, la condition peut s'énoncer ainsi :

« Pour que les plans d'incidence sur (M_1) et (M_2) du rayon moyen issu des points B du champ soient orthogonaux, il suffit que les deux cercles de Rowland de (M_1) et (M_2) relatifs aux points de l'axe soient sécants sur le segment ouvert O_1O_2 et que le diaphragme soit placé en ce point ».

Quand le point B sera pris en dehors des deux plans plus particulièrement étudiés ci-dessus, la perpendicularité des plans d'incidence ne sera plus rigoureuse, mais approchée à un angle φ infiniment petit du second ordre près. En effet, les projections sur le plan de front et le plan horizontal du rayon passant par O' et issu d'un point B quelconque du plan objet, font des angles α et β avec $O'x$, qui sont des infiniment petits du premier ordre. Les plans d'incidence sont les plans debout et vertical faisant ces angles avec $O'x$, et passant par O' . Les cosinus directeurs des normales à ces plans seront donc : $O, \sin \alpha, \cos \alpha$, et $\cos \beta, \sin \beta, O$. Les normales feront un angle dont le cosinus est : $\sin \alpha \cdot \sin \beta \sim \alpha \cdot \beta = \sin \varphi$. φ est bien un infiniment petit du second ordre.

La solution indiquée ici n'est applicable qu'à un couple de miroirs concaves, puisqu'elle suppose que la projection des centres de courbure des miroirs se trouve sur le segment O_1O_2 .

b. Points C'_1 et C'_2 conjugués de O' .

Il existe deux possibilités théoriques de choisir la position du diaphragme : nous pouvons prendre O' dans l'espace-objet ou dans l'espace-image. Supposons d'abord le centre du diaphragme dans l'espace-image. L'image de O' dans (M_2) sera une sagittale S' dans le plan vertical, et une tangentielle T' dans le plan horizontal. Si S' est en C'_2 et T' en C'_1 les rayons moyens du plan horizontal passeront bien par C'_2 et ceux du plan vertical par C'_1 . Nous aurons :

$$\frac{1}{O_2O'} = \frac{2 \sin v}{O_2C_2} + \frac{1}{O_2C'_2} \quad \frac{1}{O_2O'} = \frac{2}{O_2C_2 \sin v} + \frac{1}{O_2C'_1}$$

relations d'où nous tirons aussitôt la position du diaphragme :

$$O_2O' = O_2C'_2 / \cos 2v$$

Nous voyons que O_2O' est du signe de $O_2C'_2$. Si (M_2) est concave, O' sera virtuel.

Il reste la seconde solution : mettre le diaphragme dans l'espace objet. T' sera alors en C'_2 et S' en C'_1 :

$$O_1O' = O_1C'_1 / \cos 2u.$$

Si (M_1) est concave, O_1O' est une quantité positive.

Les diaphragmes étant nécessairement réels, les deux essais ci-dessus sont donc à rejeter quand on utilise deux miroirs concaves. Si au contraire, l'un des miroirs est concave et l'autre convexe, c'est la solution indiquée ici qu'il faut choisir, la solution du paragraphe a) étant impossible.

c. Utilisation de deux diaphragmes.

Nous venons de voir que dans le cas de deux miroirs concaves, nous pouvons conserver la perpendicularité des plans d'incidence en plaçant un diaphragme au point commun C'_1, C'_2, O' . Mais cette coïncidence nous supprime un paramètre, et nous verrons plus loin qu'elle rend impossible la correction effective de l'astigmatisme dans le champ. Nous allons utiliser deux diaphragmes : ces diaphragmes auront la forme de fentes larges ; le premier (D_1) aura son grand axe horizontal et passera par C'_1 , le second (D_2) aura son grand axe vertical et passera par C'_2 . Le rayon moyen issu de B sera le rayon qui s'appuyera sur les grands axes des deux fentes. Pour les points de l'axe AY horizontal, le diaphragme (D_2) jouera seul son rôle, et inversement, (D_1) limitera les rayons du plan vertical passant par AZ. Si les fentes sont assez longues, il n'y aura pas d'effet d'œil de chat, comme cela se produit avec un seul diaphragme, quand nous sortons du champ de pleine lumière, car ce champ sera supérieur au champ limité par la lucarne d'entrée. L'ouverture de la pupille de sortie n'aura plus la forme circulaire, mais sera rectangulaire. Pour que l'ouverture des faisceaux soit la même dans les deux directions il faudra donner aux fentes des largeurs a_H et a_V différentes. Nous aurons :

$$\left| \frac{a_H}{C'_2 T'_1} \right| = \left| \frac{a_V}{S'_1 C'_1} \right|$$

Le centre de la pupille de sortie ne sera plus un point fixe, mais variera avec le point-objet considéré.

Dans les calculs du paragraphe suivant, nous supposerons que le système comprend deux diaphragmes, placés aux points voulus par la théorie.

2. Condition algébrique

a. Problème.

Nous avons choisi les deux diaphragmes pour que la condition de perpendicularité soit vérifiée, mais cela n'entraîne pas obligatoirement que l'astigmatisme soit effectivement corrigé. Voici le problème :

Etant donné une surface-image plane, inclinée sur l'axe d'un angle θ' , est-il possible de choisir l'inclinaison

de la surface-objet plane pour que la correspondance (θ, θ') assure la correction effective de l'astigmatisme dans ces plans conjugués ? Le calcul, dans le cas général, est très complexe et sans grand intérêt ; en effet, pour les incidences moyennes, l'astigmatisme est assez faible en regard des autres aberrations et l'inclinaison des plans-objet et image négligeable, comme le vérifie bien d'ailleurs la pratique courante. Nous n'étudierons donc que le cas des systèmes travaillant sous fortes incidences.

b. Equations.

D'après les remarques du § 2.2.1.2, l'astigmatisme sur l'axe s'écrit :

$$\frac{1}{O_2A'} = \frac{2}{O_2C_2 \cdot \sin \varphi} + \frac{1}{O_2A}$$

$$\frac{1}{O_1A'} = \frac{2}{O_1C_1 \cdot \sin u} + \frac{1}{O_1A}$$

Le miroir (M_1) focalise les rayons horizontaux et (M_2) les rayons verticaux. La correction exige la condition :

$$(E) \quad \frac{-O_2C'_2 \cdot O_2A}{2 O_2A - O_2C'_2} = \frac{O_1C'_1 \cdot O_1A}{2 O_1A + O_1C'_1} - O_1O_2.$$

Le point B'_y donné par (M_2) a pour abscisse sur le rayon moyen

$$\frac{1}{O'_2B'_y} = \frac{-2}{O_2C'_2} + \frac{1}{O'B_y}.$$

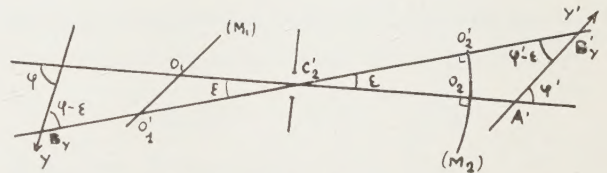


FIG. 6.

En effet (fig. 6), par le choix de la position du diaphragme, les angles d'attaque du rayon moyen issu de A et de B_y sont égaux à φ . $O'_2C_2 \cdot \sin \varphi'$ vaut donc $(-O_2C'_2)$. Le triangle $C'_2A'B'_y$ donne :

$$\frac{C'_2A'}{\sin(\varphi' - \varepsilon)} = \frac{C'_2B'_y}{\sin \varphi'}.$$

Nous supposerons que φ' n'est pas un infiniment petit, nous avons donc :

$$\sin(\varphi' - \varepsilon) = \sin \varphi' - \varepsilon \cdot \cos \varphi'.$$

$$D'où : \quad O'_2B'_y = O_2A' \left(1 + \frac{C'_2A'}{O_2A'} \cdot \varepsilon \cdot \cotg \varphi' \right).$$

$$De\ même \quad O'_2B_y = O_2A \left(1 + \frac{C_2A}{O_2A} \cdot \varepsilon \cdot \cotg \varphi \right).$$

En portant dans la formule de l'astigmatisme, et en simplifiant à l'aide de la formule pour A, nous avons :

$$(3) \quad \frac{C'_2 A' \cdot \cotg \varphi'}{O_2 A'^2} = \frac{C'_2 A \cdot \cotg \varphi}{O_2 A^2}.$$

On voit aussitôt, puisque $C'_2 A'$ et $C'_2 A$ sont généralement de signe contraire, que φ et φ' doivent être de part et d'autre de 90° . C'est la relation (3) qui lie φ et φ' .

Nous allons maintenant faire une hypothèse supplémentaire qui découle de notre hypothèse initiale sur l'ouverture des miroirs : nous supposons que les champs angulaires ε sont des infiniment petits devant les angles d'attaque. En effet, u , v et $O'_1 O_1$ sont des infiniment petits du premier ordre. Dans ces conditions nous avons aussitôt :

$$\varepsilon = \frac{u \cdot O_1 O'_1}{C'_2 O'_1}$$

qui montre bien que ε est du second ordre.

La figure 6 nous indique que :

$$\frac{1}{O'_1 B'_y} = \frac{2}{O_1 C_1 (u - \varepsilon)} + \frac{1}{O'_1 B_y}$$

$$\text{ou} \quad O'_1 B'_y = O_1 A' \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot O_1 C'_2}{u \cdot O_1 A'} \right)$$

$$\text{et} \quad O'_1 B_y = O_1 A \left(1 + \frac{\varepsilon \cdot O_1 C'_2}{u \cdot O_1 A} \right).$$

Et en portant dans la formule de l'astigmatisme, nous obtenons :

$$(4) \quad \frac{1}{O_1 A'^2} - \frac{1}{O_1 A^2} = \frac{-2}{O_1 C'_1 \cdot O_1 C'_2}$$

formule à laquelle nous adjoindrons la formule de l'astigmatisme que nous avons utilisée pour la simplification

$$(5) \quad \frac{1}{O_1 A'} - \frac{1}{O_1 A} = \frac{2}{O_1 C'_1}.$$

Reprenons le même calcul avec un point Bz de l'axe des Z, nous aurons :

$$(6) \quad \frac{C'_1 A' \cdot \cotg \psi'}{O_1 A'^2} = \frac{C'_1 A \cdot \cotg \psi}{O_1 A^2}$$

$$(7) \quad \frac{1}{O_2 A'^2} - \frac{1}{O_2 A^2} = \frac{2}{O_2 C'_2 \cdot O_2 C'_1}$$

$$(8) \quad \frac{1}{O_2 A'} - \frac{1}{O_2 A} = \frac{-2}{O_2 C'_2}.$$

Nous avons six relations à dix paramètres homogènes, il semble donc que ces relations soient compatibles. Nous allons le vérifier de plus près.

Éliminons tout de suite les relations (3) et (6), qui

sont toujours compatibles, puisque quels que soient les coefficients des cotangentes, il est toujours possible de trouver des valeurs angulaires dont les cotangentes satisfont à la relation donnée. L'expérience montre que les valeurs trouvées sont toujours acceptables.

Il nous reste donc quatre relations à six variables homogènes, mais nous avons en plus les conditions géométriques : $O_1 C'_1 > 0$ et $O_2 C'_2 < 0$. Dans les quatre relations est incluse la relation (E), puisque nous écrivons que les images données dans les deux cas doivent être confondues en A'.

Nous noterons tout de suite que confondre C'_1 et C'_2 en O' conduit à une impossibilité. On obtient en effet des valeurs de $O_1 C'_1$ et de $O_2 C'_2$ qui ne vérifient pas la relation de coïncidence (C). Nos relations sont équivalentes à

$$(9) \quad \frac{1}{O_2 A'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{O_2 C'_1} + \frac{2}{O_2 C'_2} \right)$$

$$(10) \quad \frac{1}{O_2 A} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{O_2 C'_1} + \frac{2}{O_2 C'_2} \right)$$

$$(11) \quad \frac{1}{O_1 A'} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{O_1 C'_2} + \frac{2}{O_1 C'_1} \right)$$

$$(12) \quad \frac{1}{O_1 A} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{O_1 C'_2} + \frac{2}{O_1 C'_1} \right)$$

Ce sont les relations algébriques de base pour l'étude de l'astigmatisme dans le champ.

c. Discussion.

Ces relations permettent de calculer $O_1 A$, $O_2 A'$, $O_1 C'_1$ et $O_2 C'_2$ quand nous nous donnons $O_1 O_2$.

Il existe une solution simple du système d'équations, quand nous avons un axe de symétrie. Cet axe est la bissectrice des directions $C'_1 C_1$ et $C'_2 C_2$ et passe par le milieu de $O_1 O_2$. Nous aurons alors : $O_1 A = -O_2 A'$ et $O_1 C'_1 = -O_2 C'_2$. Ce cas peut être utile quand on ne peut approcher suffisamment les miroirs de l'objet (c'est le cas d'une anticathode pour l'examen aux rayons X), car le système permet le transport de l'objet en un point facilement accessible. Les aberrations introduites par ce système sont faibles mais le grandissement moyen est égal à un.

Nous ne détaillerons pas les calculs qui conduisent à des équations du seizième degré résolues par approximation. Nous ferons seulement une étude géométrique simple du problème.

Posons :

$$O_1 C'_1 = x_1, \quad O_2 C'_1 = x_2, \quad O_1 C'_2 = y_1, \quad O_2 C'_2 = y_2 \\ O_1 A = z_1, \quad O_1 A' = z'_1, \quad O_2 A = z_2, \quad O_2 A' = z'_2.$$

Nos équations deviennent :

$$(13) \quad \frac{1}{z'_2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_2} + \frac{2}{y_2} \right)$$

$$(14) \quad \frac{1}{z'_1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{y_1} + \frac{2}{x_1} \right)$$

$$(15) \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x_2} + \frac{2}{y_2} \right)$$

$$(16) \quad \frac{1}{z_1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{y_1} + \frac{2}{x_1} \right)$$

Considérons deux systèmes d'axes trirectangles directs, de sommets ω_1 et ω_2 , tels que les coordonnées de ω_2 par rapport à ω_1 soient toutes trois égales à O_1O_2 . Dans ces conditions, un point N de l'axe du système sera représenté par le même point N' dans les deux systèmes de références.

Les formules données représentent quatre cônes du second degré. Considérons d'abord les cônes (13) et (14). Ces cônes ont pour sommets ω_1 et ω_2 . Ils se coupent suivant une courbe du quatrième degré, qui se projette suivant une courbe (Γ') sur un plan parallèle au plan $z' = 0$. (Γ') est aussi du quatrième degré, car il n'existe pas de plan $z' = k$ qui soit plan de symétrie (comme le montre l'étude de la courbe). Un point M de (Γ') détermine la position de C'_1 de C'_2 et du point A' sur l'axe. Opérons de même avec les cônes (15) et (16). Ils donneront une courbe (Γ) qui déterminera la liaison entre les positions de C'_1 , C'_2 et A. Les courbes (Γ) et (Γ') se coupent en seize points réels ou imaginaires. A chacun de ces points correspond une même position de C'_1 et de C'_2 et une position de A et A' qui vérifient toutes les équations données. Ce sont les solutions du problème. En fait, toutes les courbes (Γ) et (Γ') passent par le point qui se projette au milieu de O_1O_2 comme l'indique la remarque du début de ce paragraphe. En faisant varier O_1O_2 nous obtiendrons différentes courbes (Γ) et (Γ'), ce qui permettra de choisir les positions de A et A' par rapport à O_1O_2 donc le grandissement. Les courbes ne sont pas d'ailleurs à prendre en totalité, puisque C'_1 et C'_2 doivent être sur O_1O_2 , et que A et A' sont réels. D'où des plans limites.

4. Astigmatisme dans le champ dans le cas des systèmes complexes.

1. Condition géométrique.

Considérons le cas de deux paires de miroirs croisés, plus particulièrement intéressant du point de vue pratique. Il y a alors cinq manières possibles de placer le diaphragme: dans l'espace-objet, dans l'espace-image, et entre les miroirs. Nous désirons que la perpendicularité se conserve, si possible, dans tout le système, c'est-à-dire que le diaphragme, ou ses images, se trouvera pour les trois couples, aux points indiqués plus haut dans le cas d'une paire de miroirs seulement.

Supposons d'abord le diaphragme placé entre (M_3) et (M_4) (fig. 7). Pour que la condition géométrique

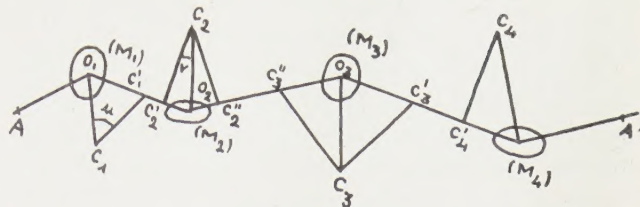


FIG. 7.

soit vérifiée pour ce couple, il faut que C'_3 et C'_4 soient confondus en O' ; de même, les images sagittales et tangentielles du diaphragme dans (M_2 , M_3) doivent être confondues avec C'_1 et C'_2 . Le calcul montre que cette condition exige que (M_3) et (M_2) soient croisés. On ne cherche pas à confondre C''_2 et C''_3 avec les images de O' dans (M_3), puisque nous avons vu que la chose est impossible dès que l'incidence est assez forte.

O' sera sur le cercle de Rowland de (M_3) relatif à O_3O_4 . Sa tangentielle-objet, qui est symétrique de O' par rapport à O_3C_3 donc en C''_3 jouera le rôle de sagittale-image par rapport à (M_2) et devra avoir sa sagittale-objet en C'_2 . On aura donc :

$$\frac{1}{O_2C'_3} = \frac{2 \sin \nu}{O_2C_2} + \frac{1}{O_2C'_2}$$

d'où une première relation :

$$(17) \quad O_2C'_3 = O_2C'_2 / \cos 2\nu = O_2O_3 - O_3C'_3.$$

$O_2C'_3$ sera négatif, il faut donc que $O_3C_3 \cdot \sin \omega > O_2O_3$. C'_3 est l'image d'une sagittale S'_3 dont la position est :

$$\frac{1}{O_3S'_3} = -\frac{2 \sin \omega}{O_3C_3} + \frac{1}{O_3C'_3} \quad \text{ou} \quad O_3S' = O_3C'_3 / \cos 2\omega$$

quantité positive. La tangentielle-objet de S'_3 par rapport à (M_2) devra être confondue avec C'_1 , ce qui donne la deuxième relation :

$$(18) \quad \frac{1}{\frac{O_3C'_1}{\cos 2\omega} + O_2O_3} = \frac{2}{O_2C_2 \cdot \sin \nu} + \frac{1}{O_2C'_1}.$$

En tirant O_2O_3 de la relation (17), et en portant cette valeur dans (18), il vient :

$$\frac{2 \cdot O_3C'_3 \cdot \cos^2 \omega}{\cos 2\omega} = -\frac{O_2C'_2}{\cos 2\nu} - \frac{O_2C'_2 \cdot O_2C'_1}{2 O_2C'_1 - O_2C'_2}.$$

Pour que la solution soit acceptable, il faut que $O_3C'_3$ soit positif, ce qui exige :

$$\frac{1}{\cos 2\nu} + \frac{O_2C'_1}{2 O_2C'_1 - O_2C'_2} > 0.$$

Cette condition est aisément réalisable, $|O_2C_2'| < 2|O_2C_1'|$, par exemple, la vérifie quel que soit φ .

En plaçant O' au point commun $C_3'' - C_4'$, il est donc possible de conserver la perpendicularité des plans d'incidence pour les couples extrêmes des miroirs. Le résultat obtenu en plaçant O' en $C_1' - C_2'$ est analogue.

Placer O' au point $C_2'' - C_3''$ est sans intérêt car la condition géométrique ne sera vérifiée que pour un couple de miroirs. Même conclusion en plaçant O' dans un des milieux extrêmes : il sera facile de calculer le système pour qu'il y ait correction de l'astigmatisme pour l'objet à l'aide des quatre miroirs, et que les images du diaphragme soient en C_2'' et C_3'' , mais si nous conservons bien la perpendicularité des plans pour le couple central, il n'en sera pas de même pour les deux autres.

La conclusion de cette étude est qu'il est possible de conserver d'une manière rigoureuse la perpendicularité des plans d'incidence sur les deux couples extrêmes de miroirs, et pour des points du champ non situés sur l'axe. La conservation est en pratique satisfaisante pour le couple intermédiaire. Elle s'effectue alors à un infiniment petit du second ordre près, comme indiqué plus haut.

L'utilisation des deux diaphragmes améliore la correction, car elle permet de vérifier la condition géométrique pour les trois couples. Nous laissons au lecteur le soin de faire les calculs dans ce cas ; ils ont été fait en partie plus haut : il suffit d'écrire que S_3' est conjugué de C_4' au lieu de C_3' .

2. Condition algébrique.

Le mode de calcul est identique à celui utilisé pour deux miroirs et les conclusions analogues. L'emploi de systèmes complexes n'a d'ailleurs pas d'intérêt pour la correction de l'astigmatisme puisque deux miroirs suffisent. L'importance de ces systèmes réside dans la possibilité théorique de corriger d'autres aberrations qui peuvent apparaître une fois l'astigmatisme corrigé.

III. Distorsion

Quand on néglige les aberrations des ordres supérieurs à un, il n'y a pas de distorsion. En effet, prenons dans le plan-objet l'axe AY horizontal et dans le plan-récepteur, $A'Y'$ horizontal. Le rayon moyen issu d'un point de AY est dans le plan horizontal, il y reste après réflexion sur (M_1) . Après réflexion sur (M_2) , il sera dans le plan debout passant par $A'Y'$, à un infiniment petit du second ordre près dû à la flèche de la section horizontale de (M_2) . Le point B'_y correspondant sera donc sur $A'Y'$ et Z n'interviendra pas dans dY' . De même, pour les points situés sur AZ , B'_z sera sur $A'Z'$, à un infiniment petit du second ordre près dû à la flèche de la section frontale de (M_1) , et il n'y aura

pas de termes en Y dans dZ' . Ce résultat ne suppose pas la correction de l'astigmatisme. Nous aurons les mêmes conclusions avec les systèmes complexes.

IV. Grandissement transversal

1. Cas de deux miroirs

1. Formules.

Supposons l'astigmatisme corrigé sur l'axe. A un infiniment petit du second ordre près, tous les rayons issus de B concourent en B' . Nous pouvons donc utiliser n'importe quel rayon pour définir B' , et en particulier celui qui passe par O_1 . Le faisceau issu de O_1 s'appuie, après réflexion sur (M_2) sur deux focales S' et T' , dont les positions sont données par :

$$\frac{1}{O_2S'} = \frac{2 \sin \varphi}{O_2C_2} + \frac{1}{O_2O_1} \quad \frac{1}{O_2T'} = \frac{2}{O_2C_2 \cdot \sin \varphi} + \frac{1}{O_2O_1}$$

La figure 8 nous montre que : $B'M/LK_2 = ML/KS'$ et $LK/O_1K = AB/O_1A$. Nous pouvons confondre à un infiniment petit du second ordre près les abscisses de K et de O_2 .

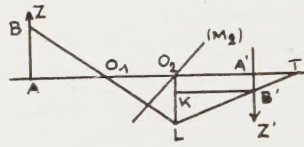


FIG. 8.

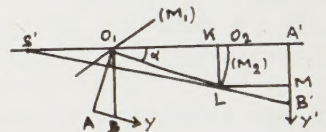


FIG. 9.

La figure 9 donne : $LK/LO_2 = O_2A'/O_2T'$ et $LO_2/O_1O_2 = AB/O_1A$. Nous avons donc les formules :

$$(19) \quad Y' \cdot O_1A = Y [O_1O_2 + O_2A' (1 - 2 O_1O_2 \cdot \sin \varphi / O_2C_2)]$$

$$(20) \quad Z' \cdot O_1A = Z [O_1O_2 + O_2A' (1 - 2 O_1O_2 / O_2C_2 \cdot \sin \varphi)]$$

2. Discussion.

Les deux grandissements g_y et g_z sont en général différents. Pour que l'égalité soit possible, il faudrait que $\sin \varphi = 1$, $\varphi = 90^\circ$ ce qui entraîne aussitôt (correction de l'astigmatisme), $u = 90^\circ$; le système serait centré. Nous pouvions nous y attendre, puisque dans un tel système, l'axe est un élément de symétrie. Nous pouvons aussi faire O_2C_2 infini, ce qui entraîne O_1C_1 infini : c'est le cas de deux miroirs plans.

Dans le cas qui nous intéresse, g_y est donc différent de g_z . Il y a anamorphose. L'écriture de g_y et de g_z pourrait faire croire que seul (M_2) intervient, mais cette expression n'est valable que si l'astigmatisme est corrigé, ce qui impose la relation (E) entre les données des deux miroirs.

3. Cas particuliers

a. Droite et cercle focaux. — Supposons d'abord que $O_2C_2 \cdot \sin \varphi = 2 \cdot O_1O_2$: le foyer gaussien de (M_2) se projette en O_1 . Nous avons :

$$g_y \cdot O_1A = O_1O_2 + O_2A' \cdot \cos^2 \nu \quad g_z = O_1O_2/O_1A$$

O_1 est situé sur le cercle focal de (M_2) , les rayons passant par O_1 et situés dans un plan de front ressortent parallèles, leur distance à l'axe est fixe, Z' ne dépend donc pas de O_2A' . Nous ferons le même raisonnement quand $O_2C_2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot \sin \nu$. Le faisceau horizontal issu de O_1 ressort parallèle, après réflexion sur (M_2) . C'est le cas où O_1 se projette en F_2 . Nous aurons alors les formules :

$$g_y = O_1O_2/O_1A \quad g_z \cdot O_1A = O_1O_2 - O_2A' \cdot \cotg^2 \nu$$

La comparaison de ces formules fait comprendre l'impossibilité des grandissements égaux. Il faudrait que O_1 se trouve à la fois au foyer sagittal et au foyer tangentiel de (M_2) ; et comme un seul miroir ne peut être corrigé de l'astigmatisme, l'égalité est impossible.

b. *Droite et cercle de Rowland.* — Si nous avons $O_2C_2 \cdot \sin \nu = O_1O_2$ et $O_2C_2 = O_1O_2 \cdot \sin \nu$, O_1 est la projection de C_2 ou se projette en C_2 , nous trouvons :

$$g_y \text{ ou } g_z = (O_1O_2 - O_2A')/O_1A.$$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} \cdot O_1A &= \left[O_1O_2 + O_2A' \left(1 - \frac{2 O_1O_2 \cdot \sin \nu}{O_2C_2} \right) \right] - \left[O_1O_2 + O_2O' \left(1 - \frac{2 O_1O_2 \cdot \sin \nu}{O_2C_2} \right) \right] \times \\ &\left\{ \frac{1 - O_1O_2 \left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2}{O_1C_1 \cdot \sin u} \right) - O_2A' \left[\left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2}{O_1C_1 \cdot \sin u} \right) \left(1 - \frac{2 \sin \nu \cdot O_1O_2}{O_2C_2} \right) + \frac{2 \sin \nu}{O_2C_2} \right]}{1 - O_1O_2 \left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2}{O_1C_1 \cdot \sin u} \right) - O_2O' \left[\left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2}{O_1C_1 \cdot \sin u} \right) \left(1 - \frac{2 \sin \nu \cdot O_1O_2}{O_2C_2} \right) + \frac{2 \sin \nu}{O_2C_2} \right]} \right\} \\ \frac{z'}{z} \cdot O_1A &= \left[O_1O_2 + O_2A' \left(1 - \frac{2 O_1O_2}{O_2C_2 \cdot \sin \nu} \right) \right] - \left[O_1O_2 + O_2O' \left(1 - \frac{2 O_1O_2}{O_2C_2 \cdot \sin \nu} \right) \right] \times \\ &\left\{ \frac{1 - O_1O_2 \left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2 \sin u}{O_1C_1} \right) - O_2A' \left[\left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2 \sin u}{O_1C_1} \right) \left(1 - \frac{2 O_1O_2}{O_2C_2 \cdot \sin \nu} \right) + \frac{2}{O_2C_2 \cdot \sin \nu} \right]}{1 - O_1O_2 \left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2 \sin u}{O_1C_1} \right) - O_2O' \left[\left(\frac{1}{O_1A} + \frac{2 \sin u}{O_1C_1} \right) \left(1 - \frac{2 O_1O_2}{O_2C_2 \cdot \sin \nu} \right) + \frac{2}{O_2C_2 \cdot \sin \nu} \right]} \right\} \end{aligned}$$

Nous n'étudierons pas ici ces expressions.

2. Cas des systèmes complexes.

1. Généralités.

Reprenons les formules du paragraphe 4.1. Nous avons obtenu $Y' = K \cdot Y$ et $Z' = k \cdot Z$, avec $K > k$. Si nous plaçons derrière ce système, un autre système analogue au premier et corrigé aussi de l'astigmatisme, avec (M_1) parallèle à (M_3) , nous aurons de même : $Y'' = K' \cdot Y'$ et $Z'' = k' \cdot Z'$, avec, selon le cas $K' \geq k'$. Si nous prenons, au contraire (M_3) parallèle à (M_2) ,

4. Cas des petits angles.

Supposons maintenant u très petit, et les ouvertures linéaires du même ordre de grandeur. Quand u tend vers zéro, les produits $O_1C_1 \cdot \sin u$ et $O_2C_2 \cdot \sin \nu$ tendent vers zéro, ce qui conduit à une impossibilité, car il faudrait que O_2A' tendit vers zéro (correction de l'astigmatisme). Il faut donc, comme nous l'avons déjà fait plus haut, choisir OC assez grand pour que ces produits restent finis. Nous avons vu que (M_1) formait seul l'image de l'axe AY et (M_2) celle de l'axe AZ , nous avons donc aussitôt :

$$g_y = \frac{O_1O_2 + O_2A'}{O_1A} \quad g_z = \frac{O_2A'}{O_1A - O_1O_2}$$

Les formules (19) et (20) donnent la même valeur pour g_y et donnent une valeur différente pour g_z ; mais l'application de la relation (E) redonne bien la formule indiquée ici.

5. Cas général.

Si nous n'avons plus la correction de l'astigmatisme, nous aurons des expressions plus compliquées. En effet, nous ne pourrions plus alors considérer n'importe quel rayon pour définir B' , il faudra prendre celui qui passe par le centre de la pupille. Le calcul complet donne :

nous aurons $Y'' = k' \cdot Y'$ et $Z'' = K' \cdot Z'$. Nous choisirons les données du système, pour que $K \cdot K' = k \cdot k'$ ou $K \cdot k' = K' \cdot k$ selon le cas, ce qui rétablira l'égalité des grandissements.

Cette conclusion reste valable si nous prenons l'ensemble des quatre miroirs corrigé de l'astigmatisme, au lieu de corriger séparément les deux moitiés.

Nous pouvons simplifier le système en supprimant (M_4) et en prenant (M_3) parallèle à (M_1) de telle sorte que l'astigmatisme soit corrigé. Dans ce cas, nous choisirons O_2O_3 de manière à rétablir l'égalité des grandissements, le troisième miroir ayant alors un grandissement inférieur à un. Nous n'examinerons ici

que le cas des fortes incidences. g_z ne change pas, et vaut toujours :

$$g_z = O_2A'/(O_1A + O_1O_2)$$

(M₁) donne une image Y₁' telle que g_{y_1} vaille :

$$g_{y_1} = \frac{O_1A'_1}{O_1A}$$

et (M₃) donne une image dont le grandissement est :

$$g_{y_2} = \frac{O_3A'}{O_3A'_1}. \text{ Le grandissement total est le produit des}$$

deux grandissements partiels, il vaut donc :

$$g_y = \frac{O_1A'_1 \cdot O_3A'}{O_1A \cdot O_3A'_1}$$

et il suffira d'écrire, en se servant des équations de l'astigmatisme que les deux grandissements sont égaux.

2. Systèmes télescopiques.

Voici un exemple simple de système corrigé de l'astigmatisme considérons deux miroirs croisés (M₁) et (M₂) tels que l'objet soit respectivement au foyer sagittal du premier, et au conjugué du foyer tangentiel du second. Il en sortira un faisceau parallèle d'où le nom de système télescopique donné à cette combinaison. Reprenons le faisceau par un autre système analogue (M₃) — (M₄) (M₂) parallèle à (M₄) — les foyers correspondants des deux miroirs étant choisis confondus. Les grandissements seront donnés, pour les fortes incidences, par :

$$g_z = O_3A'/O_2A \quad g_y = O_4A'/O_1A$$

Pour que les grandissements soient égaux, il suffira de prendre deux systèmes homothétiques l'un de l'autre, le grandissement étant égal au rapport d'homothétie. Nous voyons, de plus, dans ces formules, (comme dans celles de la correction de l'astigmatisme), que la distance des deux miroirs intermédiaires n'intervient pas et par conséquent nous pourrions éloigner les deux moitiés de l'objectif. Ceci peut être fort intéressant car nous pourrions loger entre elles, sans être gêné, les diaphragmes d'ouverture et même de champ (quoiqu'il semble préférable de prendre ce dernier dans le plan objet). Nous utiliserons ce système chaque fois qu'il sera nécessaire de faire un transport

d'image. Nous placerons en particulier entre les deux moitiés, d'autres appareils tels que filtre ou monochromateur.

Nous pouvons faire avec trois miroirs la combinaison suivante : le premier miroir donnera une image à l'infini qui sera ramenée à distance finie par le troisième. Le second miroir donnera directement une image à distance finie. L'égalité des deux grandissements se simplifie alors et donne :

$$O_3A'/O_1A = O_2A'/O_2A$$

La moitié antérieure du premier miroir et la moitié postérieure du troisième miroir sont homothétiques des deux moitiés du second miroir.

3. Inclinaison des plans objet et image.

Nous n'insisterons pas sur la question de l'inégalité des grandissements car il est possible de compenser la différence par inclinaison du plan-image. En effet, considérons les valeurs données plus haut par les relations (3) et (6). Nous voyons aussitôt, pour que l'inclinaison du plan-image soit acceptable qu'il faut que celle du plan-objet soit voisine de 90°. Nous n'aurons qu'à incliner faiblement notre plan-objet pour obtenir le déplacement de la surface-image que nous désirons. Or, quand nous avons fait le calcul des grandissements, nous avons supposé que le plan-récepteur était perpendiculaire à l'axe ; s'il n'en est pas ainsi, ce n'est pas Y' et Z' qui interviendront mais leurs valeurs multipliées par le sinus de l'angle d'inclinaison. Il nous suffira donc de choisir la valeur de ce sinus pour établir l'égalité des deux grandissements.

V. Conclusion

Dans cette étude consacrée aux systèmes asymétriques à faible ouverture linéaire, nous avons cherché à corriger la principale aberration rencontrée, l'astigmatisme, en nous attachant plus particulièrement aux systèmes simples formes de deux miroirs. Nous avons à ce sujet établi des conditions géométriques et algébriques qui permettent de résoudre le problème de la correction de l'astigmatisme sur l'axe et dans le champ. Nous en avons déduit une relation entre les inclinaisons des plans-objets et image. Nous terminons par l'étude des grandissements en signalant quelques cas particuliers.

Manuscrit reçu le 31 mai 1954.

Linearisierung der Durchrechnungsformeln für windschiefe Strahlen (I)

von Helmut MARX

Optische Werke E. Leitz, Wetzlar

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Durchrechnungsformeln werden näherungsweise linearisiert. Bei Vernachlässigung tertiärer Bildfehler (im monochromatischen Fall sind das Bildfehler 7. Ordnung) kann man die Lateralaberration in Matrizenform explizit als Funktion der Strahl-Anfangsdaten und der Lange'schen Konstruktionsdaten darstellen.

SUMMARY. — Formulae for ray-tracing are made linear using approximations. Neglecting tertiary aberrations (in the case of monochromatic light these are of the 7th order) the lateral aberration can be represented in matrix form as a function of the initial coordinates of the ray and of the Lange coordinates of construction.

SOMMAIRE. — Les formules de calcul de la marche des rayons sont rendues linéaires, par approximations.

En négligeant des aberrations tertiaires (dans le cas de la lumière monochromatique, celles-ci sont du septième ordre), on peut représenter l'aberration latérale sous forme matricielle comme une fonction des coordonnées initiales du rayon et des coordonnées de construction de Lange.

EINLEITUNG.

Unter *primären Bildfehlern* verstehen wir :

1. die primären Farbfehler 1. Ordnung (primärer Farb-Schnittweitenfehler und primäre Farb-Vergrößerung bei der paraxialen Abbildung),
2. die monochromatischen Bildfehler 3. Ordnung (Seidel'sche Bildfehler : Öffnungsfehler, Koma, Astigmatismus, Wölbung, Verzeichnung), in der englischen Sprache auch « primary aberrations » genannt.

Unter *sekundären Bildfehlern* verstehen wir :

1. die sekundären Farbfehler 1. Ordnung (sekundärer Farb-Schnittweitenfehler und sekundäre Farb-Vergrößerung bei der paraxialen Abbildung),
2. die primären Farbfehler 3. Ordnung (primäre Farbabweichungen der Seidel'schen Bildfehler),
3. die monochromatischen Bildfehler 5. Ordnung, in der englischen Sprache auch « secondary aberrations » genannt.

Unter *tertiären Bildfehlern* verstehen wir :

1. die tertiären Farbfehler 1. Ordnung,
2. die sekundären Farbfehler 3. Ordnung,
3. die primären Farbfehler 5. Ordnung,
4. die monochromatischen Bildfehler 7. Ordnung.

Entsprechend seien quartäre und höhere Bildfehler definiert.

Bei der Strahldurchrechnung sind die Konstruktionsdaten des optischen Systems und die Anfangsdaten des Strahls vorgegeben; gesucht sind im Laufe der Durchrechnung die Strahlenden in mitten des Systems, und am Ende der Durchrechnung die Aberration des Strahls gegenüber dem Gauss'schen Bildpunkt. Die Durchrechnungsformeln sind (alle oder zum Teil, je nach der Variablenwahl) nicht-linear in den Strahlenden. Zur Linearisierung der Durchrechnungsformeln gehen wir aus von einer bekannten Näherung für die Strahlenden ; für die Fehler dieser Näherungsdaten erhalten wir (in besserer Näherung) inhomogen lineare

Gleichungen, mit Funktionen der Näherungsdaten als Koeffizienten. Gehen wir von der paraxialen Näherung aus, dann erhalten wir also inhomogen lineare Gleichungen für die Aberrationen der Strahlenden, mit Funktionen der paraxialen Näherungswerte als Koeffizienten. Die paraxialen Näherungswerte kann man durch die Anfangsdaten des Strahls und durch die LANGE'schen Konstruktionsdaten ohne Verwendung von Matrizen darstellen. Schreibt man die linearen Gleichungen für die Aberrationen in Matrizenform und eliminiert die Spalten mit den Aberrationen inmitten des Systems, dann erhält man die Aberration des Strahls gegenüber dem Gauss'schen Bildpunkt in Matrizenform explizit dargestellt als Funktion der Anfangsdaten des Strahls und der Konstruktionsdaten des Systems. Dabei sind überraschenderweise erst tertiäre und höhere Bildfehler vernachlässigt ; die Lösung enthält also zusammen mit den Bildfehlern 3. Ordnung und den primären Farbfehlern 1. Ordnung noch alle Bildfehler 5. Ordnung, primären Farbfehler 3. Ordnung und sekundären Farbfehler 1. Ordnung.

1. Iterative Strahldurchrechnung nach W. WEINSTEIN.

T. SMITH [1] gibt ein Iterationsverfahren zur Durchrechnung windschiefer Strahlen durch rotations-symmetrische optische Systeme mit sphärischen und asphärischen Flächen an, das eine Konvergenz 1. Ordnung ⁽¹⁾ besitzt, wie W. WEINSTEIN [3] feststellt. Dieses Iterationsverfahren liefert die durchzurechnen-

⁽¹⁾ Nicht zu verwechseln mit den Bildfehler-Ordnungen, von denen in dieser Arbeit fast ausschliesslich die Rede ist. Nach D. R. HARTREE [2] betrachtet man den nach irgendeinem Schritt einer Iteration noch vorhandenen Fehler ϵ' einer gesuchten Grösse als Funktion des Fehlers ϵ nach dem vorausgegangenen Schritt, und man denkt sich ϵ' als Potenzreihe nach ϵ entwickelt :

$\epsilon' = c_1 \cdot \epsilon + c_2 \cdot \epsilon^2 + \dots$; ist nun c_{11} der erste von Null verschiedene Koeffizient dieser Reihe :

$\epsilon' = c_{11} \cdot \epsilon^n + 0(\epsilon^{n+1})$, so bezeichnet man nach HARTREE die Iteration als von n-ter Ordnung.

den Strahldaten beim ersten Schritt in paraxialer Näherung, es liefert die lateralen Ortskoordinaten x , y und die lateralen (optischen) Richtungskosinus ξ , η also beim ersten Schritt bis auf Fehler 3. Ordnung; es liefert sie beim zweiten Schritt bis auf Fehler 5. Ordnung, beim dritten Schritt bis auf Fehler 7. Ordnung, allgemein beim N -ten Schritt bis auf Fehler $(2N+1)$ ter Ordnung (d. h. Grössen $(2N+1)$ ter Ordnung sind beim N -ten Schritt vernachlässigt).

W. WEINSTEIN [3] gibt ein Iterationsverfahren an, das eine Konvergenz 2. Ordnung besitzt. Diese schnellere Konvergenz erreicht er durch eine Anwendung des NEWTON-RAPHSON'schen Verfahrens zur Auflösung von Gleichungen, verallgemeinert für mehrere Unbekannte. WEINSTEIN sucht beim Übergang eines Strahls zur nächsten brechenden Fläche, ebenso wie T. SMITH, den Schnittpunkt des Strahls mit einer die Fläche annähernden Ebene auf und geht von da auf einer achsenparallelen Geraden zu der Fläche über, er nähert aber die Fläche durch eine andere Ebene an als T. SMITH: Beide wählen beim N -ten Iterationsschritt eine Ebene, die den beim $(N-1)$ ten Iterationsschritt gefundenen Durchstosspunkt D_{N-1} enthält; aber während SMITH diese Ebene senkrecht zur optischen Achse wählt, nähert WEINSTEIN die Fläche besser an durch ihre Tangentialebene im Punkt D_{N-1} . So stellt sich nach WEINSTEIN der Unterschied zwischen seiner und SMITH's Iteration geometrisch dar, und zwar nicht nur für den Übergang von einer Fläche zur nächsten, sondern auch für die Brechung von einem Medium ins nachfolgende, die sich ja im ξ , η , ζ -Raum als Übergang von einer Kugelfläche zu einer dazu konzentrischen Kugelfläche darstellen lässt (ξ , η , ζ sind die optischen, d. h. mit dem Brechungsindex n multiplizierten, Richtungskosinus des Strahls).

Wir machen nun einen Unterschied zwischen der Iteration nach W. WEINSTEIN, wie er sie in der zitierten Arbeit geometrisch beschrieben hat (und wovon im vorigen Absatz die Rede war), und den Iterationsformeln, die er im Anschluss an die geometrische Beschreibung der Iteration aufgestellt hat. Diese Formeln ergeben sich nämlich aus der geometrischen Beschreibung der Iteration nur durch eine Näherung. Dies brauchte kein Schaden zu sein, wenn die durch diese Näherung hereingebrachte Ungenauigkeit nicht von grösserer Grössenordnung wäre als der Fehler, den man ohne diese Näherung nach dem betrachteten Iterationsschritt noch hat. WEINSTEIN's Iteration, soweit sie geometrisch beschrieben ist, liefert beim ersten Schritt die lateralen Koordinaten x , y und ξ , η bis auf Fehler 3. Ordnung, beim zweiten Schritt bis auf Fehler 7. Ordnung, beim dritten Schritt bis auf Fehler 15. Ordnung, allgemein beim N -ten Schritt bis auf Fehler $(2^{N+1}-4)$ ter Ordnung [d. h. Grössen $(2^{N+1}-4)$ ter Ordnung sind beim N -ten Schritt vernachlässigt]. WEINSTEIN's Iterationsformeln lassen wegen der zusätzlichen Näherung die gesuchten Strahldaten nicht so rasch gegen ihre wahren Werte konvergieren wie die Iteration, soweit sie geometrisch beschrieben ist,

obwohl beide eine Konvergenz 2. Ordnung besitzen; seine Iterationsformeln liefern x , y und ξ , η beim ersten Schritt bis auf Fehler 3. Ordnung, beim zweiten Schritt bis auf Fehler 5. Ordnung, beim dritten Schritt bis auf Fehler 9. Ordnung, allgemein beim N -ten Schritt bis auf Fehler (2^N+1) ter Ordnung [d. h. Grössen (2^N+1) ter Ordnung sind beim N -ten Schritt vernachlässigt].

Mit dieser Zuordnung der einzelnen Iterationsschritte zu den Ordnungen der jeweils noch verbleibenden Fehler haben wir die Konvergenz der WEINSTEIN'schen Iterationsformeln besser und die Konvergenz seiner geometrisch beschriebenen Iteration noch sehr viel besser als WEINSTEIN selbst eingeschätzt⁽¹⁾. WEINSTEIN nahm an [5], sein Iterationsverfahren liefere x , y und ξ , η beim ersten Schritt bis auf Fehler 3. Ordnung, beim zweiten Schritt bis auf Fehler 5. Ordnung, beim dritten Schritt bis auf Fehler 7. Ordnung, allgemein beim N -ten Schritt bis auf Fehler $(2N+1)$ ter Ordnung [d. h. Grössen $(2N+1)$ ter Ordnung seien beim N -ten Schritt vernachlässigt].

Im II. Teil dieser Arbeit werden wir auf die iterative Strahldurchrechnung nach W. WEINSTEIN näher eingehen.

2. Durchrechnungsformeln für windschiefe Strahlen.

Das rotationssymmetrische optische System hat brechende Flächen mit der laufenden Nummer $v = 1$; 2 ; 3 ; ... V . Den Abstand des v -ten Flächenscheitels vom $(v-1)$ ten bezeichnen wir mit a_v oder mit a'_{v-1} . Den Brechungsindex vor bzw. hinter der v -ten Fläche bezeichnen wir mit n_v bzw. n'_v . Die brechende Fläche Nr. v , die sphärisch oder asphärisch sein kann, wird von einem Strahl getroffen in einem Punkt mit den kartesischen Komponenten x_v ; y_v ; z_v , zwischen denen durch die Flächengleichung ein Zusammenhang besteht:

$$(1) \quad z_v = F_v(q_v), \text{ wobei } q_v \equiv x_v^2 + y_v^2 \text{ ist.}$$

Die z_v -Achse lassen wir mit der optischen Achse zusammenfallen, den Nullpunkt legen wir in den zum Scheitel S_v der Fläche gehörigen Krümmungsmittelpunkt C_v ; den zugehörigen Krümmungsradius $S_v C_v$ bezeichnen wir mit r_v ; es ist

$$(2) \quad r_v = \frac{1}{2} \left(\frac{dq_v}{dz_v} \right)_{q_v=0}.$$

Das Licht wird nacheinander an den Flächen Nr. 1 ; 2 ; ... V gebrochen; die positive z -Richtung weist von Flächen kleinerer zu Flächen grösserer Nummern v . Die x_v -Achsen aller Flächen $v = 1 \dots V$ sollen parallel zueinander stehen, ebenso die y_v -Achsen. Um die Vorstellung festzulegen, sagen wir, wie üblich, dass

⁽¹⁾ Referat von H. MARX [4], über [3]. In diesem Referat ist die Schrittnummer N um 1 niedriger gezählt als in der vorliegenden Arbeit.

die positive z -Richtung von links nach rechts weist, die positive y -Richtung von unten nach oben, und die positive x -Richtung von vorn nach hinten. — Für eine Kugelfläche lautet Gl. (1) ausgeschrieben :

$$(1') \quad z_v = -\sqrt{r_v^2 - (x_v^2 + y_v^2)} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Mit (r_v) unter der Spitze des Wurzelzeichens ist gemeint, dass die Wurzel das Vorzeichen von r_v haben soll. r_v ist der Radius der Kugelfläche ; er ist positiv, wenn das Licht die Kugelfläche konvex (d. h. von aussen her) trifft, der Kugelmittelpunkt C_v also rechts vom Scheitel S_v der Kugelfläche liegt ; er ist negativ, wenn das Licht die Kugelfläche konkav (d. h. von innen her) trifft, C_v also links von S_v liegt. Mit $\xi_v ; \eta_v ; \zeta_v$ bezeichnen wir die optischen (d. h. mit dem Brechungsindex multiplizierten) Richtungskosinus des Strahls im Medium vor der v -ten Fläche, mit $\xi'_v ; \eta'_v ; \zeta'_v$ die optischen Richtungskosinus im Medium hinter der v -ten Fläche. Zwischen den optischen Richtungskosinus $\xi_v ; \eta_v ; \zeta_v$ besteht der Zusammenhang

$$(3) \quad \zeta = \sqrt{n_v^2 - (\xi_v^2 + \eta_v^2)} \quad \text{oder} \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = n^2 ;$$

das entsprechende gilt für $\xi'_v ; \eta'_v ; \zeta'_v$. — Die Wurzelvorzeichen in Gl. (1') und Gl. (3) gelten für den Normalfall, dass keine Überhalbkugeln als brechende Flächen vorkommen und dass die Strahlen überall von links nach rechts laufen.

Die Normale im Durchstosspunkt $D_v(x_v ; y_v ; z_v)$ der brechenden Fläche trifft die optische Achse in einem Punkt mit den Koordinaten $(0 ; 0 ; c_v)$, der im Fall einer Kugelfläche mit deren Mittelpunkt C_v zusammenfällt ($c_v = 0$). Bei einer asphärischen Fläche ist

$$(4) \quad c_v = z_v - s_v ; \quad s_v = -\frac{1}{2} \frac{dq_v}{dz_v} ;$$

s_v ist die Subnormale.

Aus $\xi ; \eta ; \zeta$ und $x ; y ; z$ erhält man in bekannter Weise $\xi' ; \eta' ; \zeta'$ durch Auflösung der *Brechungsformeln* :

$$(5a) \quad \xi' = \xi - \lambda x ; \quad \eta' = \eta - \lambda y ;$$

$$(5b) \quad \zeta' = \zeta + \lambda s ; \quad s = -\frac{1}{2} \frac{dz(q)}{dq} ; \quad q \equiv x^2 + y^2 ;$$

$$(5c) \quad \zeta' = \sqrt{n'^2 - (\xi'^2 + \eta'^2)}$$

nach $\xi' ; \eta' ; \zeta'$ (bei Elimination von λ, s, q).

Aus $x_1 ; y_1 ; z_1$ und $\xi_2 \equiv \xi'_1 ; \eta_2 \equiv \eta'_1 ; \zeta_2 \equiv \zeta'_1$ erhält man $x_2 ; y_2 ; z_2$ durch Auflösung der *Übergangsformeln* :

$$(6a) \quad x_2 = x_1 + l_2 \xi_2 ; \quad y_2 = y_1 + l_2 \eta_2 ;$$

$$(6b) \quad z_2 = z_1 - e_2 + l_2 \zeta_2 ;$$

$$(6c) \quad z_2 = F_2(q_2) ; \quad q_2 \equiv x_2^2 + y_2^2$$

nach $x_2 ; y_2 ; z_2$ (bei Elimination von l_2 und q_2). Dabei haben wir anstelle des Scheitelabstandes a_2 die Entfernung e_2 zwischen den Scheitel-Krümmungsmittelpunkten C_1 und C_2 in die Formeln eingeführt :

$$(7) \quad e_2 = a_2 + r_2 - r_1.$$

Bei Kugelflächen vereinfachen sich die *Brechungsformeln* zu :

$$(8a) \quad \xi' = \xi + \lambda x ; \quad \eta' = \eta + \lambda y ;$$

$$(8b) \quad \zeta' = \zeta + \lambda z ;$$

$$(8c) \quad \zeta' = \sqrt{n'^2 - (\xi'^2 + \eta'^2)}$$

und die *Übergangsformeln* zu :

$$(9a) \quad x_2 = x_1 + l_2 \xi_2 ; \quad y_2 = y_1 + l_2 \eta_2 ;$$

$$(9b) \quad z_2 = z_1 - e_2 + l_2 \zeta_2 ;$$

$$(9c) \quad z_2 = -\sqrt{r_2^2 - (x_2^2 + y_2^2)}.$$

Die Formeln (9 a), (9 b), (9 c) für den Übergang zu einer Kugelfläche sind ähnlich gebaut wie die Formeln (5 a), (5 b), (5 c) für die Brechung an einer asphärischen Fläche ; wir können die ersteren in die letzteren umwandeln, indem wir (nach Weglassen des Index 2)

$$(10) \quad \begin{array}{l} \text{ersetzen : } \left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ \xi & \eta & \zeta \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} e & \xi \eta \zeta & l \\ 0 & x y s & \lambda \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{array} \right| \frac{-r}{+n'} \\ \text{durch : } \left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ \xi & \eta & \zeta \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} e & \xi \eta \zeta & l \\ 0 & x y s & \lambda \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{array} \right| \frac{-r}{+n'} \end{array}$$

Nur die zweite und dritte Gl. (5 b) entsteht bei dieser Umwandlung nicht ; diese beiden Gleichungen hätten wie Gl. (6 c) auch zu den Übergangsformeln gezählt werden können.

Die Gleichung der Tangentialebene an der Fläche (6 c) in einem Punkt $(\bar{x} ; \bar{y} ; \bar{z})$ lautet :

$$(11) \quad \bar{x}(x - \bar{x}) + \bar{y}(y - \bar{y}) + \bar{s}(z - \bar{z}) = 0 ;$$

dabei ist $\bar{s} = -\frac{1}{2} / F'(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$.

3. Linearisierung aller Durchrechnungsformeln.

Beim Übergang eines Strahls zur nächsten Fläche hat man die Gleichungen der Strahl-Geraden :

$$(12) \quad \zeta(x - x_1) = \xi(z - [z_1 - e]) ; \quad \zeta(y - y_1) = \eta(z - [z_1 - e])$$

und die Gleichung der nächsten Fläche :

$$(13) \quad z = F(x^2 + y^2)$$

nach den Schnittpunktskoordinaten x, y, z aufzulösen. Die Gl. (12) und (13) folgen aus (6 a, b, c) durch Elimination von l und q , und durch Weglassen des Index 2. Die Geraden-Gl. (12) ist linear in x, y, z ; die Flächen-Gl. (13) ist es nicht, wenn die Fläche nicht eben ist. WEINSTEIN's Annäherung der Fläche durch eine Tangentialebene bedeutet eine Linearisierung der Flächen-Gl. (13) : Man gehe aus von einem Punkt

$$(14) \quad \bar{x} ; \bar{y} ; \bar{z} = F(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

auf der Fläche in der Nähe des gesuchten Schnittpunktes, setze

$$(15) \quad x \equiv \bar{x} + \Delta x; y \equiv \bar{y} + \Delta y; z \equiv \bar{z} + \Delta z$$

in (13) ein, entwickle nach den Δ -Grössen und breche nach den linearen Gliedern ab:

$$\bar{z} + \Delta z = \underbrace{F(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}_z + \underbrace{2 F'(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \cdot [\bar{x}\Delta x + \bar{y}\Delta y]}_{-1/\bar{s}},$$

folglich

$$(16) \quad \bar{x}\Delta x + \bar{y}\Delta y + \bar{s}\Delta z = 0;$$

das ist die Gleichung (11) der Tangentialebene im Punkt $(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ der Fläche. Die in x, y, z oder $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ linearen Gleichungen (12) und (11) oder (16) kann man jetzt in einfacher Weise nach x, y, z oder $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ auflösen.

Nun stellen wir fest: die Gleichungen (12) der Strahlgeraden sind zwar linear in den beim Übergang gesuchten Strahldaten x, y, z ; sie sind aber nicht linear in Bezug auf *alle* vorkommenden Strahldaten, sie sind bilinear in $x_1, y_1, z_1; \xi, \eta, \zeta; x, y, z$. Zusätzlich zu der von WEINSTEIN durchgeführten Linearisierung der nichtlinearen (im Fall einer Kugelfläche quadratischen) Flächengleichung (13), linearisieren wir nun auch noch die übrigen, bilinearen Übergangsformeln (12). Wir setzen die Ausdrücke (15) und

$$(15') \quad \xi \equiv \bar{\xi} + \Delta \xi; \eta \equiv \bar{\eta} + \Delta \eta; \zeta \equiv \bar{\zeta} + \Delta \zeta$$

für x, y, z und ξ, η, ζ (und entsprechend auch für x_1, y_1, z_1) in Gl. (12) ein und erhalten:

$$(17) \quad \begin{cases} \bar{\zeta}(\bar{y}-\bar{y}_1)-\bar{\eta}(\bar{z}-[\bar{z}_1-e])+\bar{\zeta}(\Delta y-\Delta y_1)-\bar{\eta}(\Delta z-\Delta z_1)+ \\ + \Delta \zeta(\bar{y}-\bar{y}_1)-\Delta \eta(\bar{z}-[\bar{z}_1-e])=0(\Delta \zeta \Delta y; \Delta \eta \Delta z); \\ \bar{\zeta}(\bar{x}-\bar{x}_1)-\bar{\xi}(\bar{z}-[\bar{z}_1-e])+\bar{\zeta}(\Delta x-\Delta x_1)-\bar{\xi}(\Delta z-\Delta z_1)+ \\ + \Delta \zeta(\bar{x}-\bar{x}_1)-\Delta \xi(\bar{z}-[\bar{z}_1-e])=0(\Delta \zeta \Delta x; \Delta \xi \Delta z). \end{cases}$$

Die rechten Seiten werden zur Linearisierung vernachlässigt. Wir haben in Gl. (17) angegeben, von welcher Grössenordnung die zu vernachlässigenden Glieder sind. Dabei steht z. B. Δy für Δy und Δy_1 ; und $0(\Delta \zeta \Delta y; \Delta \eta \Delta z)$ soll heissen: Glieder der Grössenordnung $(\Delta \zeta \cdot \Delta y) +$ Glieder der Grössenordnung $(\Delta \eta \cdot \Delta z)$. Die Gleichungen (17), mit 0 statt $0(\dots; \dots)$ auf den rechten Seiten, sind inhomogen linear in $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1; \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta; \Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Bei der Linearisierung der Flächen-Gl. (13), die zu Gl. (16) führt, sind Glieder der Grössenordnung $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ und $(\Delta z)^2$ vernachlässigt:

$$(18) \quad \bar{x} \Delta x + \bar{y} \Delta y + \bar{s} \Delta z = 0(\Delta x^2 + \Delta y^2; \Delta z^2);$$

hierbei und im Folgenden ist mit Δx^2 nicht $\Delta(x^2)$ gemeint, sondern $(\Delta x)^2$. Die Gl. (16), d. i. die Gl. (18) mit 0 statt $0(\dots; \dots)$ auf der rechten Seite, ist homogen linear in $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Der in Gl. (18) stehende Näherungswert für die Subnormale:

$$(19 a) \quad \bar{s} = -\frac{1}{2} / F'(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

ist gleich \bar{z} im Fall einer Kugelfläche.

Die Näherungswerte \bar{x} und \bar{y} von x und y können beliebig gewählt werden. Die Näherungswerte \bar{s} von s und \bar{z} von z sind aber gemäss Gl. (19 a) und Gl. (19 b) durch \bar{x} und \bar{y} so bestimmt, wie s und z durch x und y bestimmt sind;

$$(19 b) \quad z = F(\bar{x}^2 + \bar{y}^2).$$

Mit Hilfe der Grösse $j \equiv \frac{ds}{dz}$, gebildet für $x = \bar{x}$;

$y = \bar{y}$:

$$(19 c) \quad \bar{j} = \frac{1}{2} \frac{F''(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{\{F'(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\}^3}$$

können wir $\Delta s \equiv s - \bar{s}$ durch Δz ausdrücken:

$$(19 d) \quad \Delta s = \bar{j} \Delta z + \bar{k} \cdot 0(\Delta z^2).$$

Bei einer Kugelfläche ist $\bar{j} = 1; \bar{k} = 0$.

Die Übergangsformeln (17) und (18), spezialisiert für Kugelflächen ($\bar{s} = \bar{z}$), übersetzen wir jetzt gemäss (10) in Brechungsformeln:

$$(17') \quad \begin{cases} \bar{s}(\bar{\eta}'-\bar{\eta})-\bar{y}(\bar{\zeta}'-\bar{\zeta})+\bar{s}(\Delta \eta'-\Delta \eta)-\bar{y}(\Delta \zeta'-\Delta \zeta)+ \\ + \Delta s(\bar{\eta}'-\bar{\eta})-\Delta y(\bar{\zeta}'-\bar{\zeta})=0(\Delta s \Delta \eta; \Delta y \Delta \zeta); \\ \bar{s}(\bar{\xi}'-\bar{\xi})-\bar{x}(\bar{\zeta}'-\bar{\zeta})+\bar{s}(\Delta \xi'-\Delta \xi)-\bar{x}(\Delta \zeta'-\Delta \zeta)+ \\ + \Delta s(\bar{\xi}'-\bar{\xi})-\Delta x(\bar{\zeta}'-\bar{\zeta})=0(\Delta s \Delta \xi; \Delta x \Delta \zeta); \end{cases}$$

$$(18') \quad \bar{\xi}' \Delta \zeta' + \bar{\eta}' \Delta \eta' + \bar{\zeta}' \Delta \zeta' = 0(\Delta \xi^2 + \Delta \eta^2; \Delta \zeta^2).$$

Dabei ist, entsprechend (19 b), angenommen, dass der Näherungswert $\bar{\zeta}'$ durch $\bar{\xi}'$ und $\bar{\eta}'$ so bestimmt ist, wie ζ' durch ξ' und η' :

$$(19') \quad \bar{\zeta}' = \sqrt{n'^2 - (\bar{\xi}'^2 + \bar{\eta}'^2)},$$

während die Näherungswerte $\bar{\xi}'$ und $\bar{\eta}'$ beliebig gewählt werden können.

4. Linearisierung im Fall brechender Kugelflächen.

Bei der weiteren Behandlung der linearisierten Durchrechnungsformeln beschränken wir uns auf brechende *Kugelflächen*. Der Fall der Kugelflächen wäre recht unwichtig, wenn es uns hier, wie WEINSTEIN l. c., auf die iterative Strahldurchrechnung ankäme. Denn iterieren muss man bei asphärischen Flächen; nicht aber bei Kugelflächen, bei denen man die Durchrechnungsformeln für den einzelnen Übergang oder die einzelne Brechung in geschlossener Form nach den gesuchten Zwischenvariablen auflösen kann. Aber auf die iterative Strahldurchrechnung kommt es uns im I. Teil dieser Arbeit nicht an. Wir suchen hier vielmehr, so gut es geht, die Aberration gegenüber dem Gauss'schen Bildpunkt explizit als Funktion der Anfangsdaten des Strahls und der Konstruktionsda-

ten des optischen Systems darzustellen. Das macht auch bei Kugelflächen Schwierigkeiten. Wollte man etwa die Zwischenvariablen aus den strengen Durchrechnungsformeln eliminieren, dann käme man zu äusserst verwickelten und deshalb unbrauchbaren Ausdrücken. Verzichtet man auf strenge Ausdrücke, fordert man aber, dass alle primären und sekundären Bildfehler berücksichtigt sind, dann ermöglichen auch bei Kugelflächen erst die linearisierten Durchrechnungsformeln eine brauchbare Darstellung der gesuchten Art für die Aberration.

Die linearisierten Formeln (17) bis (19') spezialisieren wir nun nicht für Kugelflächen, sondern wir leiten die linearisierten Formeln für Kugelflächen neu ab, indem wir erst in die strengen Durchrechnungsformeln für Kugelflächen neue Variablen einführen und danach linearisieren. Dabei lassen wir zu, dass der Näherungswert \bar{z}' mit \bar{x}' und \bar{y}' auch anders verknüpft ist als gemäss Gl. (19'); wir lassen zu, dass die Quadratsumme von \bar{x}' , \bar{y}' , \bar{z}' gleich dem Quadrat eines Näherungswertes \bar{n}' von n' ist.

Wir führen, zusätzlich zu den Strahldaten ξ ; η ; ζ und x ; y ; z , die Variablen ein :

$$(20) \quad t \equiv \zeta x - \xi z \quad ; \quad u \equiv \zeta y - \eta z,$$

und zusätzlich zu x ; y ; z und ξ' ; η' ; ζ' :

$$(20') \quad t' \equiv x\zeta' - z\xi' \quad ; \quad u' \equiv y\zeta' - z\eta'.$$

Bei einem in der y,z -Ebene liegenden Meridianstrahl ($\xi = 0$; $x = 0$; $\xi' = 0$) ist $t = 0$; $t' = 0$ und $u = nr \cdot \sin i$; $u' = r n' \sin i'$, wobei i der Einfallswinkel und i' der Ausfallswinkel ist. Bei einem windschiefen Strahl ist t die negative y -Komponente und u die positive x -Komponente des Vektorprodukts aus den beiden Vektoren $\{x; y; z\}$ und $\{\xi; \eta; \zeta\}$; das Entsprechende gilt für t' und u' .

Man sieht, dass die Übergangsformeln (12) sich mit den in Gl. (20), (20') eingeführten Variablen so schreiben lassen :

$$(21) \quad t = t_1 + e\xi \quad ; \quad u = u_1 + e\eta.$$

Die Übergangsformel (13) lautet bei Kugelflächen :

$$(22) \quad z = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

(r)

Mit Hilfe des Übersetzungsschlüssels (10) können wir diese Übergangsformeln in die entsprechenden Brechnungsformeln umschreiben :

$$(21') \quad t' = t \quad ; \quad u' = u \quad ;$$

$$(22') \quad \zeta' = +\sqrt{n'^2 - (\xi'^2 + \eta'^2)} \quad \text{oder} \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = n'^2 \quad ;$$

(n')

denn gemäss (10) geht $\zeta x - \xi z = t$ in $z\xi' - x\zeta' = -t'$ über und $x_1 \zeta'_1 - z_1 \xi'_1 = t'_1$ in $\xi z - \zeta x = -t$, und entsprechend geht u in $-u'$ und u'_1 in $-u$ über.

Nun setzen wir

$$(23) \quad x \equiv \bar{x} + \Delta x \quad ; \quad y \equiv \bar{y} + \Delta y \quad ; \quad z \equiv \bar{z} + \Delta z \quad ;$$

dabei sind \bar{x} und \bar{y} Näherungswerte (von x und y), die beliebig gewählt werden können. Den Näherungswert \bar{z} von z verknüpfen wir mit \bar{x} , \bar{y} und r so, wie z mit x , y und r verknüpft ist :

$$(24) \quad \bar{z} = -\sqrt{r^2 - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}.$$

(r)

Entsprechend (23) setzen wir

$$(23') \quad \xi' \equiv \bar{\xi}' + \Delta\xi' \quad ; \quad \eta' \equiv \bar{\eta}' + \Delta\eta' \quad ; \quad \zeta' \equiv \bar{\zeta}' + \Delta\zeta' \quad ;$$

dabei sind $\bar{\xi}'$ und $\bar{\eta}'$ Näherungswerte (von ξ' und η'), die beliebig gewählt werden können. Den Näherungswert $\bar{\zeta}'$ von ζ' verknüpfen wir mit $\bar{\xi}'$, $\bar{\eta}'$ und \bar{n}' , einem Näherungswert von n' , so, wie ζ' mit ξ' , η' und n' verknüpft ist :

$$(24') \quad \bar{\zeta}' = +\sqrt{\bar{n}'^2 - (\bar{\xi}'^2 + \bar{\eta}'^2)}.$$

(\bar{n}')

Wir setzen

$$(25') \quad n' \equiv \bar{n}' + \Delta n'.$$

Der Näherungswert \bar{n}' von n' kann beliebig gewählt werden. Z. B. kann n' der Brechungsindex für die Fraunhofer'sche Linie C sein und \bar{n}' der Brechungsindex für die Linie e. Oder es kann z. B. $\bar{n}' = n'$, also $\Delta n' = 0$, gewählt werden ; dieser Fall entspricht Gl. (19').

Ferner setzen wir

$$(26) \quad t \equiv \bar{t} + \Delta t \quad ; \quad u \equiv \bar{u} + \Delta u \quad ;$$

$$(26') \quad t' \equiv \bar{t}' + \Delta t' \quad ; \quad u' \equiv \bar{u}' + \Delta u' \quad ,$$

und wir setzen fest, dass die Formeln (21) und (21') auch für die Näherungswerte \bar{t} ; \bar{u} , \bar{t}' ; \bar{u}' und $\bar{\xi}$; $\bar{\eta}$ gelten :

$$(27) \quad \bar{t} = \bar{t}_1 + e\bar{\xi} \quad ; \quad \bar{u} = \bar{u}_1 + e\bar{\eta} \quad ;$$

$$(27') \quad \bar{t}' = \bar{t} \quad ; \quad \bar{u}' = \bar{u}$$

Die Ausdrücke (23), (23'), (25'), (26), (26') setzen wir in die Übergangsformeln (21), (20), (22) und in die Brechnungsformeln (21'), (20'), (22') ein und erhalten :

$$(28) \quad \Delta t = \Delta t_1 + e\Delta\xi \quad ; \quad \Delta u = \Delta u_1 + e\Delta\eta \quad ;$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} (\bar{\xi}\Delta z - \bar{\zeta}\Delta x) &= (\bar{x}\Delta\zeta - \bar{z}\Delta\xi) - \Delta t + \\ &+ (\bar{\zeta}\bar{x} - \bar{\xi}\bar{z} - \bar{t}) + 0(\Delta\bar{\xi}\Delta z; \Delta\bar{\zeta}\Delta x) \quad ; \\ (\bar{\eta}\Delta z - \bar{\zeta}\Delta y) &= (\bar{y}\Delta\zeta - \bar{z}\Delta\eta) - \Delta u + \\ &+ (\bar{\zeta}\bar{y} - \bar{\eta}\bar{z} - \bar{u}) + 0(\Delta\bar{\eta}\Delta z; \Delta\bar{\zeta}\Delta y) \quad ; \end{aligned} \right.$$

$$(30) \quad \bar{x}\Delta x + \bar{y}\Delta y + \bar{z}\Delta z = 0(\Delta x^2; \Delta y^2; \Delta z^2) \quad ;$$

$$(28') \quad \Delta t' = \Delta t ; \quad \Delta u' = \Delta u ;$$

$$(29') \quad \left. \begin{aligned} (\bar{x}\Delta\zeta' - \bar{z}\Delta\xi') &= (\bar{\xi}'\Delta z - \bar{\zeta}'\Delta x) + \Delta t' + \\ &+ (\bar{z}\bar{\xi}' - \bar{x}\bar{\zeta}' + \bar{t}') + 0(\Delta\xi\Delta z; \Delta\zeta\Delta x) ; \\ (\bar{y}\Delta\zeta' - \bar{z}\Delta\eta') &= (\bar{\eta}'\Delta z - \bar{\zeta}'\Delta y) + \Delta u' + \\ &+ (\bar{z}\bar{\eta}' - \bar{y}\bar{\zeta}' + \bar{u}') + 0(\Delta\eta\Delta z; \Delta\zeta\Delta y) ; \end{aligned} \right\}$$

$$(30') \quad \bar{\xi}'\Delta\xi' + \bar{\eta}'\Delta\eta' + \bar{\zeta}'\Delta\zeta' = 0(\Delta\xi^2; \Delta\eta^2; \Delta\zeta^2; n\Delta n).$$

Zur Auflösung der Gl. (29), (30) nach Δx ; Δy ; Δz und der Gl. (29'), (30') nach $\Delta\xi'$; $\Delta\eta'$; $\Delta\zeta'$ ist es gut, ausser der negativen y -Komponente t und der x -Komponente u des Vektorprodukts aus $\{x; y; z\}$ und $\{\xi; \eta; \zeta\}$ noch dessen z -Komponent I einzuführen:

$$(31) \quad I \equiv \eta x - \xi y ,$$

und entsprechend ausser t' und u' noch I' :

$$(31') \quad I' \equiv x\eta' - y\xi' .$$

Multipliziert man die erste Gl. (12) mit η , die zweite mit ξ und zieht beides voneinander ab, dann erhält man:

$$\zeta(x\eta - x_1\eta - y\xi + y_1\xi) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(32) \quad I = I_1 .$$

Aus dieser Übergangsformel für I erhalten wir die entsprechende Brechungsformel durch Anwendung des Übersetzungsschlüssels (10), wonach $\eta x - \xi y = I$ in $y\xi' - x\eta' = -I'$ übergeht und $x_1\eta'_1 - y_1\xi'_1 = I'_1$ in $\xi y - \eta x = -I$:

$$(32') \quad I' = I .$$

I ist also invariant gegenüber Brechung und Übergang. I ist die « windschiefe » Invariante, sie ist dann und nur dann von null verschieden, wenn der Strahl windschief ist. Wir berücksichtigen (32) und (32') im Folgenden dadurch, dass wir bei I den Index (die Flächen-Nummer) und den Strich (') weglassen, von denen diese Invariante ja unabhängig ist.

Die bilinearen Gleichungen (31) und (31') linearisieren wir. Da die Invariante I als Funktion der Anfangsdaten des Strahls im Objektraum in Strenge bekannt ist, brauchen wir in Gl. (31) und (31') nur für $\xi; \eta; x; y; \xi'; \eta'$ die Ansätze (23), (23') einzusetzen, nicht auch einen entsprechenden Ansatz für I . Wir erhalten:

$$(33) \quad (\bar{\xi}\Delta y - \bar{\eta}\Delta x) = (\bar{x}\Delta\eta - \bar{y}\Delta\xi) + (\bar{\eta}\bar{x} - \bar{\xi}\bar{y} - I) + 0(\Delta\xi\Delta y; \Delta\eta\Delta x);$$

$$(33') \quad (\bar{x}\Delta\eta' - \bar{y}\Delta\xi') = (\bar{\xi}'\Delta y - \bar{\eta}'\Delta x) + (\bar{y}\bar{\xi}' - \bar{x}\bar{\eta}' + I) + 0(\Delta\xi\Delta y; \Delta\eta\Delta x).$$

Damit aus der ersten Gl. (29) eine Gleichung für die Unbekannte Δx allein wird, formen wir nun die linke Seite der ersten Gl. (29) um, indem wir erst Δz durch Gl. (30) eliminieren und dann Δy durch Gl. (33):

$$(\bar{\xi}\Delta z - \bar{\zeta}\Delta x) = -\frac{1}{\bar{z}} \left[(\bar{\xi}\bar{x} + \bar{\zeta}\bar{z}) \Delta x + \bar{\xi}\bar{y}\Delta y \right] + \frac{1}{\bar{z}} 0(\Delta x^2; \Delta y^2; \Delta z^2) \quad \text{wegen (30)}$$

$$= -\frac{1}{\bar{z}} \left[(\bar{\xi}\bar{x} + \bar{\eta}\bar{y} + \bar{\zeta}\bar{z}) \Delta x + \bar{y}(\bar{\xi}\Delta y - \bar{\eta}\Delta x) \right] + \frac{1}{\bar{z}} 0(\dots)$$

$$= -\frac{1}{\bar{z}} \left[(\bar{\xi}\bar{x} + \bar{\eta}\bar{y} + \bar{\zeta}\bar{z}) \Delta x + \bar{y}(\bar{x}\Delta\eta - \bar{y}\Delta\xi) + \bar{y}(\bar{\eta}\bar{x} - \bar{\xi}\bar{y} - I) \right] + \frac{\bar{\xi}}{\bar{z}} 0(\Delta x^2; \Delta y^2; \Delta z^2) + \frac{\bar{y}}{\bar{z}} 0(\Delta\xi\Delta y; \Delta\eta\Delta x) \quad \text{wegen (33)}.$$

Auch das auf der rechten Seite der ersten Gl. (29) stehende Glied $(\bar{x}\Delta\zeta - \bar{z}\Delta\xi)$ formen wir um; wir eliminieren $\Delta\zeta$ durch Gl. (30'), die wir uns ohne Striche (') geschrieben denken:

$$\begin{aligned} (\bar{x}\Delta\zeta - \bar{z}\Delta\xi) &= -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left[(\bar{\xi}\bar{x} + \bar{\zeta}\bar{z}) \Delta\xi + \bar{\eta}\bar{x}\Delta\eta \right] + \\ &+ \frac{\bar{x}}{\bar{\zeta}} 0(\Delta\xi^2; \Delta\eta^2; \Delta\zeta^2; n\Delta n) \quad \text{wegen (30')} \\ &= -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left[(\bar{\xi}\bar{x} + \bar{\eta}\bar{y} + \bar{\zeta}\bar{z}) \Delta\xi + \right. \\ &+ \bar{\eta}(\bar{x}\Delta\eta - \bar{y}\Delta\xi) \left. \right] + \\ &+ \frac{\bar{x}}{\bar{\zeta}} 0(\Delta\xi^2; \Delta\eta^2; \Delta\zeta^2; n\Delta n). \end{aligned}$$

Bevor wir diese beiden Ausdrücke in die erste Gl. (29) einsetzen, vereinfachen wir die Angabe über die Grössenordnung der vernachlässigten Glieder. Wir schliessen aus, dass der Winkel σ zwischen Strahl und optischer Achse oder der Winkel φ zwischen Flächennormale und optischer Achse in der Gegend von 90° liegt. Dann ist

$$\zeta \equiv n \cos \sigma \approx n \quad \text{und} \quad z \equiv -r \cos \varphi \approx -r.$$

Und wir schliessen aus, dass der Brechungswinkel i oder i' in der Gegend von 90° liegt. Für die Grössen

$$(34) \quad \omega \equiv -(\xi x + \eta y + \zeta z);$$

$$(34') \quad \omega' \equiv -(x\xi' + y\eta' + z\zeta')$$

gilt dann: $\omega \equiv n r \cos i \approx n r$; $\omega' \equiv r n' \cos i' \approx r n'$. Wir werden mit den aus den Näherungswerten gebildeten Grössen

$$(35) \quad \omega^* \equiv -(\bar{\xi}\bar{x} + \bar{\eta}\bar{y} + \bar{\zeta}\bar{z});$$

$$(35') \quad \omega^{*'} \equiv -(\bar{x}\bar{\xi}' + \bar{y}\bar{\eta}' + \bar{z}\bar{\zeta}')$$

rechnen. Für die Grössenordnung von $\bar{\xi}$, ω^* , \bar{z} , ω^{*} , $\bar{\zeta}'$ wollen wir das Gleiche wie für ξ , ω , z , ω' , ζ' annehmen:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \sim n; \omega \sim nr; z \sim -r; \omega' \sim rn'; \zeta' \sim n'; \\ \bar{\xi} \sim n; \omega^* \sim nr; \bar{z} \sim -r; \omega^{*'} \sim rn'; \bar{\zeta}' \sim n'. \end{array} \right.$$

Nun bezeichnen wir mit α die grösste Grössenordnung, die unter allen Strahldaten ξ/n ; η/n ; x/r ; y/r und Näherungswerten $\bar{\xi}/n$; $\bar{\eta}/n$; \bar{x}/r ; \bar{y}/r im optischen System vorkommt; und mit $\Delta\alpha$ die grösste Grössenordnung, die unter allen Differenzen $\Delta\xi/n$; $\Delta\eta/n$; $\Delta x/r$; $\Delta y/r$ im System vorkommt. Für die grösste unter allen Differenzen $\Delta n/n$ vorkommende Grössenordnung schreiben wir $\Delta\epsilon$. Dann ist nach (30), (30') und (36):

$$(37) \quad \frac{\Delta\bar{\zeta}}{n} = 0(\alpha\Delta\alpha; \Delta\epsilon); \quad \frac{\Delta\bar{z}}{r} = 0(\alpha\Delta\alpha),$$

wobei jetzt das Symbol $0(\dots)$ eine Grössenordnung bedeutet, die \sim oder $\ll (\dots)$ ist. Damit wird aus der ersten Gl. (29), wenn wir noch die Abkürzungen

$$(38) \quad t^* \equiv \bar{\xi}\bar{x} - \bar{\xi}\bar{z}; \quad u^* \equiv \bar{\eta}\bar{y} - \bar{\eta}\bar{z}; \quad I^* \equiv \bar{\eta}\bar{x} - \bar{\xi}\bar{y};$$

$$(38') \quad t^{*'} \equiv \bar{x}\bar{\xi}' - \bar{z}\bar{\xi}'; \quad u^{*'} \equiv \bar{y}\bar{\eta}' - \bar{z}\bar{\eta}'; \quad I^{*'} \equiv \bar{x}\bar{\eta}' - \bar{y}\bar{\xi}'$$

einführen:

$$(39) \quad (\bar{\xi}\Delta z - \bar{\zeta}\Delta x) = (\bar{x}\Delta\bar{\xi} - \bar{z}\Delta\bar{\xi}) - \Delta t + \\ - (t^* - \bar{t}) + r n \cdot 0(\alpha\Delta\alpha^2; \Delta\alpha\Delta\epsilon),$$

und aus den beiden Ausdrücken für

$$(\bar{\xi}\Delta z - \bar{\zeta}\Delta x) \quad \text{und} \quad (\bar{x}\Delta\bar{\xi} - \bar{z}\Delta\bar{\xi}):$$

$$(\bar{\xi}\Delta z - \bar{\zeta}\Delta x) = -\frac{1}{z} \left[-\omega^* \Delta x + \bar{y} (\bar{x} \Delta \eta - \bar{y} \Delta \xi) + \bar{y} (I^* - I) \right] + r n \cdot 0(\alpha\Delta\alpha^2);$$

$$(\bar{x}\Delta\bar{\xi} - \bar{z}\Delta\bar{\xi}) = -\frac{1}{\bar{\zeta}} \left[-\omega^{*'} \Delta \bar{\xi} + \bar{\eta} (\bar{x} \Delta \eta - \bar{y} \Delta \xi) \right] + r n \cdot 0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon).$$

Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in (39) ergibt nach Division durch ω^* die nachfolgende erste Gl. (41). Die zweite Gl. (41) folgt ganz entsprechend aus der zweiten Gl. (29), und Gl. (40) ist mit Gl. (28) identisch. Die Gl. (40), (41) ohne die Glieder $0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon)$ sind die *linearisierten Übergangsformeln*:

$$(40) \quad \Delta t = \Delta t_1' + e \Delta \xi; \quad \Delta u = \Delta u_1' + e \Delta \eta;$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta x}{z} = \frac{\Delta \xi}{\bar{\zeta}} - \frac{\Delta t}{\omega^*} + \frac{u^*}{\omega^*} \left(\frac{\bar{x}}{z} \frac{\Delta \eta}{\bar{\zeta}} - \frac{\bar{y}}{z} \frac{\Delta \xi}{\bar{\zeta}} \right) + \\ + \frac{t^* - \bar{t}}{\omega^*} + \frac{\bar{y}}{z} \frac{I^* - I}{\omega^*} + 0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon); \\ \frac{\Delta y}{z} = \frac{\Delta \eta}{\bar{\zeta}} - \frac{\Delta u}{\omega^*} - \frac{t^*}{\omega^*} \left(\frac{\bar{x}}{z} \frac{\Delta \eta}{\bar{\zeta}} - \frac{\bar{y}}{z} \frac{\Delta \xi}{\bar{\zeta}} \right) + \\ + \frac{u^* - \bar{u}}{\omega^*} - \frac{\bar{x}}{z} \frac{I^* - I}{\omega^*} + 0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon). \end{array} \right.$$

Die Gl. (40'), (41') ohne die Glieder $(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon)$ sind die *linearisierten Brechungsformeln*:

$$(40') \quad \Delta t' = \Delta t; \quad \Delta u' = \Delta u;$$

$$(41') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta \xi'}{\bar{\zeta}'} = \frac{\Delta x}{z} + \frac{\Delta t'}{\omega^{*'}} - \frac{u^{*'}}{\omega^{*'}} \left(\frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta y}{z} - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta x}{z} \right) - \\ - \frac{t^{*'} - \bar{t}'}{\omega^{*'}} - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{I^{*'} - I}{\omega^{*'}} + 0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon); \\ \frac{\Delta \eta'}{\bar{\zeta}'} = \frac{\Delta y}{z} + \frac{\Delta u'}{\omega^{*'}} + \frac{t^{*'}}{\omega^{*'}} \left(\frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta y}{z} - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta x}{z} \right) - \\ - \frac{u^{*'} - \bar{u}'}{\omega^{*'}} + \frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \frac{I^{*'} - I}{\omega^{*'}} + 0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon); \end{array} \right.$$

sie folgen aus den Gl. (28'), (29') auf die gleiche Weise wie (40), (41) aus (28), (29).

Die aus den linearisierten Formeln, den Gl. (40) bis (41') ohne die Glieder $0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon)$, berechneten Differenzen Δx ; Δy ; usw. sind nicht die genauen Differenzen $(x - \bar{x})$; $(y - \bar{y})$; usw., wegen der Vernachlässigung der Glieder $0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon)$. Wir wollen, um mit den Definitionen (23), (23'), (26), (26') nicht in Widerspruch zu geraten, die aus den linearisierten Formeln berechneten Differenzen mit $\underline{\Delta x}$; $\underline{\Delta y}$; usw. bezeichnen.

Mit Hilfe der linearisierten Durchrechnungsformeln kann man, ausgehend von den Näherungswerten $\bar{\xi}$; $\bar{\eta}$; $\bar{\zeta}$; \bar{x} ; \bar{y} ; \bar{z} und \bar{t} ; \bar{u} ; \bar{t}' ; \bar{u}' , verbesserte Näherungswerte $(\bar{\xi} + \Delta \bar{\xi})$; $(\bar{\eta} + \Delta \bar{\eta})$; $(\bar{x} + \Delta \bar{x})$; $(\bar{y} + \Delta \bar{y})$ und $(\bar{t} + \Delta \bar{t})$; $(\bar{u} + \Delta \bar{u})$; $(\bar{t}' + \Delta \bar{t}')$; $(\bar{u}' + \Delta \bar{u}')$ berechnen, die wir mit $\underline{\xi}$; $\underline{\eta}$; \underline{x} ; \underline{y} und \underline{t} ; \underline{u} ; \underline{t}' ; \underline{u}' bezeichnen:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\xi} \equiv \bar{\xi} + \Delta \bar{\xi}; \quad \underline{\eta} \equiv \bar{\eta} + \Delta \bar{\eta}; \quad \underline{x} \equiv \bar{x} + \Delta \bar{x}; \\ \underline{y} \equiv \bar{y} + \Delta \bar{y}; \\ \underline{t} \equiv \bar{t} + \Delta \bar{t}; \quad \underline{u} \equiv \bar{u} + \Delta \bar{u}; \quad \underline{t}' \equiv \bar{t}' + \Delta \bar{t}'; \\ \underline{u}' \equiv \bar{u}' + \Delta \bar{u}'. \end{array} \right.$$

Man könnte, mit Hilfe der Gl. (30), (30') ohne $0(\dots)$, auch noch verbesserte Näherungswerte $(\bar{z} + \Delta \bar{z})$ und

$(\bar{\zeta} + \Delta\bar{\zeta})$ berechnen; doch hängen diese i. allg. nicht mit \bar{x} ; \bar{y} bzw. $\bar{\xi}$; $\bar{\eta}$ gemäss Gl. (24) bzw. (24') zusammen. Man muss also, wenn man aufgrund der verbesserten Näherungswerte nochmal die linearisierten Durchrechnungsformeln anwenden will, die dann zu grundelegenden, verbesserten Näherungswerte von z und $\bar{\zeta}$ mit Hilfe von Gl. (24) und (24') neu ausrechnen. — Die verbesserten Näherungswerte \bar{t} ; \bar{u} ; \bar{t}' ; \bar{u}' dagegen kann man, ebenso wie $\bar{\xi}$; $\bar{\eta}$; \bar{x} ; \bar{y} , der neuen Rechnung zugrundelegen, weil der Zusammenhang (27), (27') auch zwischen \bar{t} ; \bar{u} ; \bar{t}' ; \bar{u}' und $\bar{\xi}$; $\bar{\eta}$ besteht; dies folgt aus (27), (40), (42) und (27'), (40'), (42).

5. Planflächen; Anfang und Ende der Durchrechnung.

Die am Anfang des § 4 stehenden Übergangsformeln (21), (20), (22):

$$(43 \text{ a}) \quad t = t'_1 + e\bar{\xi} \quad ; \quad u = u'_1 + e\bar{\eta} \quad ;$$

$$(43 \text{ b}) \quad \bar{\zeta}x - \bar{\xi}z = t \quad ; \quad \bar{\zeta}y - \bar{\eta}z = u \quad ;$$

$$(43 \text{ c}) \quad z = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \quad (r)$$

und die Brechungsformeln (21'), (20'), (22'):

$$(43 \text{ a}') \quad t' = t \quad ; \quad u' = u \quad ;$$

$$(43 \text{ b}') \quad x\bar{\zeta}' - z\bar{\xi}' = t' \quad ; \quad y\bar{\zeta}' - z\bar{\eta}' = u' \quad ;$$

$$(43 \text{ c}') \quad \bar{\zeta}' = +\sqrt{n'^2 - (\bar{\xi}'^2 + \bar{\eta}'^2)} \quad (n')$$

versagen im Grenzfall $r \rightarrow \infty$ einer Planfläche. Auch die hieraus abgeleiteten linearisierten Durchrechnungsformeln (40) bis (41') versagen bei einer Planfläche. Nur die Formeln (31) bis (32') für die windschiefe Invariante:

$$(44) \quad r_x - \bar{\xi}y = I \quad ;$$

$$(44') \quad x\eta' - y\bar{\xi}' = I$$

und die hieraus abgeleiteten linearisierten Formeln (33) und (33') gelten auch bei einer Planfläche.

Die Koordinaten x_v ; y_v ; z_v des Durchstosspunkts einer Fläche Nr. v , die eine Planfläche ist, wollen wir von einem beliebigen Punkt C_v der optischen Achse aus zählen. Bei einer Planfläche ist C_v also nicht, wie bei einer Kugelfläche mit endlichem Radius, der Krümmungsmittelpunkt. Mit e_v bezeichnen wir, wie bei Kugelflächen, die Entfernung zwischen C_{v-1} und C_v ; und mit $e'_v \equiv e_{v+1}$ die Entfernung zwischen C_v und C_{v+1} . Mit r_v bezeichnen wir die Entfernung zwischen dem Achsenpunkt S_v der Fläche und dem Koordinatenanfangspunkt C_v , wie bei einer Kugelfläche. Dann

hat man statt (43) die folgenden Formeln für den Übergang zu einer Planfläche:

$$(45 \text{ a}) \quad t = t'_1 + e\bar{\xi} \quad ; \quad u = u'_1 + e\bar{\eta} \quad ;$$

$$(45 \text{ b}) \quad \bar{\zeta}x - \bar{\xi}z = t \quad ; \quad \bar{\zeta}y - \bar{\eta}z = u \quad ;$$

$$(45 \text{ c}) \quad z = -r$$

und statt (43') die folgenden Formeln für die Brechung an einer Planfläche:

$$(45 \text{ a}') \quad \bar{\xi}' = \bar{\xi} \quad ; \quad \bar{\eta}' = \bar{\eta} \quad ;$$

$$(45 \text{ b}') \quad t' = x\bar{\zeta}' - z\bar{\xi}' \quad ; \quad u' = y\bar{\zeta}' - z\bar{\eta}' \quad ;$$

$$(45 \text{ c}') \quad \bar{\zeta}' = +\sqrt{n'^2 - (\bar{\xi}'^2 + \bar{\eta}'^2)} \quad (n')$$

Für den Übergang von einer Planfläche zu einer Kugelfläche gelten, im Anschluss an (45'), die Übergangsformeln (43) wie beim Übergang von Kugelfläche zu Kugelfläche. Für den Übergang von Planfläche zu Planfläche gelten die Formeln (45).

Die Linearisierung der Formeln (45 a) bis (45 c') erfolgt ähnlich wie in § 4. Man hat nur zu beachten, dass jetzt $z = -r = \text{const.}$ ist, und dass jetzt $\bar{\xi}' = \bar{\xi}$; $\bar{\eta}' = \bar{\eta}$ ist anstelle von $t' = t$; $u' = u$. Fordert man statt Gl. (24), (24'), (27), (27') für die Näherungswerte die Beziehungen:

$$(46) \quad \bar{t} = \bar{t}'_1 + e\bar{\xi} \quad ; \quad \bar{u} = \bar{u}'_1 + e\bar{\eta} \quad ;$$

$$(47) \quad \bar{z} = -r \quad ;$$

$$(48) \quad \bar{\xi}' = \bar{\xi} \quad ; \quad \bar{\eta}' = \bar{\eta} \quad ;$$

$$(49) \quad \bar{\zeta}' = +\sqrt{n'^2 - (\bar{\xi}'^2 + \bar{\eta}'^2)} \quad (n')$$

dann erhält man aus (45), (44) die linearisierten Formeln für den Übergang zu einer Planfläche:

$$(50) \quad \Delta t = \Delta t'_1 + e\Delta\bar{\xi} \quad ; \quad \Delta u = \Delta u'_1 + e\Delta\bar{\eta} \quad ;$$

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta x}{z^*} &= \frac{\Delta\bar{\xi}}{\bar{\zeta}} - \frac{\Delta t}{\omega^*} + \frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}} \left(\frac{\bar{x}}{z^*} \frac{\Delta\bar{\eta}}{\bar{\zeta}} - \frac{\bar{y}}{z^*} \frac{\Delta\bar{\xi}}{\bar{\zeta}} \right) + \\ &\quad + \frac{t^* - \bar{t}}{\omega^*} + 0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon) \quad ; \\ \frac{\Delta y}{z^*} &= \frac{\Delta\bar{\eta}}{\bar{\zeta}} - \frac{\Delta u}{\omega^*} - \frac{\bar{\xi}}{\bar{\zeta}} \left(\frac{\bar{x}}{z^*} \frac{\Delta\bar{\eta}}{\bar{\zeta}} - \frac{\bar{y}}{z^*} \frac{\Delta\bar{\xi}}{\bar{\zeta}} \right) + \\ &\quad + \frac{u^* - \bar{u}}{\omega^*} + 0(\alpha\Delta\alpha^2; \alpha\Delta\epsilon) \end{aligned} \right.$$

und aus (45'), (44') die linearisierten Formeln für die Brechung an einer Planfläche:

$$(50') \quad \Delta\bar{\xi}' = \Delta\bar{\xi} \quad ; \quad \Delta\bar{\eta}' = \Delta\bar{\eta} \quad ;$$

$$(51') \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta t'}{\omega^{*'}} &= \frac{\Delta \xi'}{\bar{\zeta}'} - \frac{\Delta x}{z^{*'}} + \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \left(\frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta y}{z^{*'}} - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta x}{z^{*'}} \right) + \\ &+ \frac{t^{*'} - \bar{t}'}{\omega^{*'}} + \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{I^{*'} - I}{\omega^{*'}} + 0(\alpha \Delta \alpha^2; \alpha \Delta \varepsilon); \\ \frac{\Delta u'}{\omega^{*'}} &= \frac{\Delta \eta'}{\bar{\zeta}'} - \frac{\Delta y}{z^{*'}} - \frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \left(\frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta y}{z^{*'}} - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta x}{z^{*'}} \right) + \\ &+ \frac{u^{*'} - \bar{u}'}{\omega^{*'}} - \frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \frac{I^{*'} - I}{\omega^{*'}} + 0(\alpha \Delta \alpha^2; \alpha \Delta \varepsilon), \end{aligned} \right.$$

wobei

$$(52) \quad z^* \equiv -\omega^*/\bar{\zeta}; \quad z^{*'} \equiv -\omega^{*'}/\bar{\zeta}'$$

ist.

Mit diesen Formeln erfassen wir auch den Anfang der Durchrechnung bei der Objektebene, und das Ende der Durchrechnung bei der Gauss'schen Bildebene. Wir zählen die Objektebene als Fläche Nr. 0, und die Gauss'sche Bildebene als Fläche Nr. (V + 1); die dazwischen liegenden Flächen Nr. 1 bis V sind die brechenden Flächen des optischen Systems. Den Koordinatenanfangspunkt C_0 für die Objektkoordinaten $x_0; y_0; z_0$ legen wir in den Achsenpunkt der Eintrittspupille, den Koordinatenanfangspunkt C_{V+1} für die Bildkoordinaten $x_{V+1}; y_{V+1}; z_{V+1}$ legen wir in den Achsenpunkt der Austrittspupille.

Als Anfangsdaten des Strahls wählen wir die Objektkoordinaten $x_0; y_0$ und die « Pupillenkoordinaten » $t'_0; u'_0$, die bis auf den Faktor ζ'_0 gleich den Koordinaten $x_p; y_p$ des Durchstosspunkts des Strahls durch die Eintrittspupillen-Ebene sind :

$$(53) \quad t'_0 = \zeta'_0 \cdot x_p; \quad u'_0 = \zeta'_0 \cdot y_p.$$

Aus den Differenzen $\Delta x_0; \Delta y_0; \Delta t'_0; \Delta u'_0$ der Strahl-Anfangsdaten erhält man durch Anwendung der Brechungsformeln (51') $\Delta \xi'_0$ und $\Delta \eta'_0$ (anders als bei einer wirklichen Brechung an einer Planfläche, wo die Formeln (51') zur Bestimmung von $\Delta t'$ und $\Delta u'$ da sind). Danach sind abwechselnd die Formeln (40), (41) oder (50), (51) für den Übergang und die Formeln (40'), (41') bzw. (50'), (51') für die Brechung an der Reihe. Die Durchrechnung endet mit dem Übergang (50), (51) von der letzten brechenden Fläche (Nr. V) zur Bildebene (Nr. V + 1); man erhält aus den Formeln (51) die gesuchten Differenzen Δx_{V+1} und Δy_{V+1} der Bildkoordinaten.

6. Paraxiale Näherung.

Einer ersten Anwendung der linearisierten Durchrechnungsformeln legen wir recht grobe Näherungswerte zugrunde : die Daten des längs der optischen Achse laufenden Strahls :

$$(54) \quad \bar{\xi} = 0; \quad \bar{\eta} = 0; \quad \bar{x} = 0; \quad \bar{y} = 0$$

und

$$(55) \quad t = 0; \quad \bar{u} = 0; \quad \bar{t}' = 0; \quad \bar{u}' = 0,$$

in Übereinstimmung mit (27), (27') bzw. (46), (48). Dann ist $\Delta x = x; \Delta y = y$; usw. und $0(\Delta \alpha) = 0(\alpha)$.

Aus (24), (24') bzw. (47), (49) folgt wegen (54) :

$$(56) \quad \bar{\zeta} = +n; \quad \bar{z} = -r$$

und aus (35), (35'), (38), (38') :

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} t^* &= 0; & u^* &= 0; & t^{*'} &= 0; & u^{*'} &= 0; \\ \omega^* &= \bar{n}r & & & \omega^{*'} &= \bar{n}r' \end{aligned} \right.$$

Als Näherungswert \bar{n} wählen wir den Brechungsindex bei einer in der Rechnung bevorzugten Wellenlänge λ_0 , z. B. bei $\lambda_0 = 546,1 \text{ m}\mu$ (Hg-Linie e) :

$$(58) \quad \bar{n} = n(\lambda_0) \equiv m;$$

für $n(\lambda_0)$ schreiben wir kürzer : m (monochromatisches n). Die grösste Grössenordnung, die unter allen Dispersionen $(n - m)/m$ im optischen System vorkommt, bezeichnen wir mit ε . Dann ist wegen (58) : $0(\Delta \varepsilon) = 0(\varepsilon)$.

Damit wird aus den linearisierten Durchrechnungsformeln (40) bis (41') :

$$(59) \quad t = t'_1 + e\xi; \quad u = u'_1 + e\eta;$$

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} x/r &= -\xi/m + t/(mr) + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); \\ y/r &= -\eta/m + u/(mr) + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); \end{aligned} \right.$$

$$(59') \quad t' = t; \quad u' = u;$$

$$(60') \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'/m' &= -x/r + t'/(rm') + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); \\ \eta'/m' &= -y/r + u'/(rm') + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Dabei haben wir wegen $\Delta x = x; \Delta y = y$; usw. überall das Zeichen Δ weggelassen. Bei der Durchrechnung lässt man die Glieder $0(\alpha^3; \alpha\varepsilon)$ weg und erhält die verbesserten Näherungswerte $\underline{x}/r; \underline{y}/r$; usw. Ihre Fehler gegenüber den wahren Werten $x/r; y/r$; usw. sind, wie man aus (59) bis (60') schliessen kann, von der Grössenordnung $0(\alpha^3; \alpha\varepsilon)$ der in den einzelnen Formeln vernachlässigten Glieder :

$$(61 a) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi/n &= \underline{\xi}/m + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); & \eta/n &= \underline{\eta}/m + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); \\ x/r &= \underline{x}/r + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); & y/r &= \underline{y}/r + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); \end{aligned} \right.$$

$$(61 b) \quad \left\{ \begin{aligned} t/(nr) &= \underline{t}/(mr) + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); & u/(nr) &= \dots; \\ t'/(rn') &= \underline{t}'/(rm') + 0(\alpha^3; \alpha\varepsilon); & u'/(rn') &= \dots \end{aligned} \right.$$

Die Fehler $\propto(\alpha^3)$ bedeuten monochromatische Bildfehler 3. Ordnung, und die Fehler $\propto(\alpha\varepsilon)$ bedeuten primäre Farbfehler 1. Ordnung; die Fehler $\ll(\alpha^3; \alpha\varepsilon)$ bedeuten Bildfehler (einschl. Farbfehler) höherer Ordnung. Es sind also, mit der in der Einleitung dieser Arbeit erklärten Bezeichnungsweise, primäre und höhere Bildfehler vernachlässigt.

Die mit solchen Fehlern behafteten Näherungswerte $\underline{x}/r; \underline{y}/r$; usw. sind die « paraxialen » Näherungs-

werte. Die für diese Näherungswerte gültigen Durchrechnungsformeln (59) bis (60') ohne $0(\alpha^3; \alpha\epsilon)$ schreiben wir jetzt in Matrizenform. Dabei lassen wir den Formelsatz für die sagittalen Komponenten ξ ; t ; x ; t' weg, weil er nicht verknüpft ist mit dem Formelsatz für die meridionalen Komponenten η ; u ; y ; u' , und weil beide Formelsätze gleich gebaut sind. Mit den Abkürzungen

$$(62) \quad M' \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M \equiv \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -me & 1 \end{pmatrix}$$

ist :

$$(63') \quad \begin{pmatrix} -\eta'/m' \\ u' \end{pmatrix} = M' \cdot \begin{pmatrix} y/r \\ u' \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y/r \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y/r \\ u \end{pmatrix};$$

$$(63) \quad \begin{pmatrix} y/r \\ u \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} -\eta/m \\ u \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\eta/m \\ u \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} -\eta'/m' \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsformeln (63) gelten, wie man aus (50), (51) schliessen kann, auch für den Übergang von der letzten Fläche (Nr. V) zur Bildebene (Nr. V + 1). Die erste Brechungsformel (63') gilt, wie man aus (51') schliessen kann, auch für die formal anzunehmende Brechung an der Objektebene (Nr. 0). Die Anfangswerte y_0/r_0 und u'_0 sind den wahren Werten gleichzusetzen :

$$(64) \quad y_0/r_0 = y_0/r_0; \quad u'_0 = u'_0.$$

Die zweite Brechungsformel (63') lassen wir auch bei der Fläche Nr. 0 gelten, mit der formalen Bedeutung : man kann bei u'_0 (= u'_0) den Strich (') weglassen, die meridionale Pupillenkoordinate also auch mit u_0 (oder u_0) bezeichnen. — Im Folgenden wollen wir der Einfachheit halber von wirklich brechenden Planflächen absehen ; alle Flächen Nr. 1 bis V sollen also Kugelflächen sein.

Aus (63'), (63) folgt : Mit

$$(65 a) \quad \begin{pmatrix} -\chi_v/m_v & -\psi_v/m_v \\ p_v & q_v \end{pmatrix} \equiv E_v M'_v M_{v-1} E_{v-1} \dots M'_1 M_1 E_1 M'_0$$

wodurch χ , ψ und p , q definiert sind ⁽¹⁾, ist :

$$(65 b) \quad \begin{pmatrix} -\eta/m \\ u \end{pmatrix}_v \equiv \begin{pmatrix} -\chi/m & -\psi/m \\ p & q \end{pmatrix}_v \cdot \begin{pmatrix} y_0/r_0 \\ u_0 \end{pmatrix};$$

mit

$$(66 a) \quad \begin{pmatrix} g_v/r_v & h_v/r_v \\ p_v & q_v \end{pmatrix} \equiv M_v E_v M'_{v-1} M_{v-1} E_{v-1} \dots M'_1 M_1 E_1 M'_0,$$

wodurch g , h und — in Übereinstimmung mit (65 a) — p , q definiert sind, ist :

(1) Ab § 6 hat q eine andere Bedeutung als in § 2.

$$(66 b) \quad \begin{pmatrix} y/r \\ u \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} g/r & h/r \\ p & q \end{pmatrix}_v \cdot \begin{pmatrix} y_0/r_0 \\ u_0 \end{pmatrix};$$

und mit

$$(67 a) \quad \begin{pmatrix} -\chi'_v/m'_v & -\psi'_v/m'_v \\ p'_v & q'_v \end{pmatrix} \equiv M'_v M_v E_v M'_{v-1} M_{v-1} E_{v-1} \dots M'_1 M_1 E_1 M'_0,$$

wodurch p' , q' und χ' , ψ' definiert sind, ist :

$$(67 b) \quad \begin{pmatrix} -\eta'/m' \\ u' \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} -\chi'/m' & -\psi'/m' \\ p' & q' \end{pmatrix}_v \cdot \begin{pmatrix} y_0/r_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

7. Paraxiale Koeffizienten.

Die durch Gl. (65 a), (66 a), (67 a) definierten Grössen χ , ψ , p , q , g , h heissen « paraxiale Koeffizienten ». Man kann sie aus den Konstruktionsdaten m , e , r ausrechnen mit Hilfe der folgenden Durchrechnungsformeln (die man für das praktische Rechnen besser elementar, ohne Matrizen, schreibt) :

$$(68 a) \quad \begin{pmatrix} -\chi/m & -\psi/m \\ p & q \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -me & 1 \end{pmatrix}_v \cdot \begin{pmatrix} -\chi/m' & -\psi'/m' \\ p' & q' \end{pmatrix}_{v-1} \text{ bei } v = 1 \dots (V+1);$$

$$(68 b) \quad \begin{pmatrix} g/r & h/r \\ p & q \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 0 & mr \end{pmatrix}_v \cdot \begin{pmatrix} -\chi/m & -\psi/m \\ p & q \end{pmatrix}_v \text{ bei } v = 1 \dots (V+1);$$

$$(68 c) \quad \begin{pmatrix} -\chi'/m' & -\psi'/m' \\ p' & q' \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & r m' \end{pmatrix}_v \cdot \begin{pmatrix} g/r & h/r \\ p & q \end{pmatrix}_v \text{ bei } v = 0 \dots V.$$

Diese Formeln folgen aus (65 a), (66 a), (67 a) und (62).

Die Durchrechnung beginnt mit Gl. (68 c) für $v = 0$, man geht aus von

$$(69) \quad \begin{pmatrix} g/r & h/r \\ p & q \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann rechnet man abwechselnd mit den Gl. (68 a), (68 b), (68 c) von der ersten brechenden Fläche ($v = 1$) bis zur letzten ($v = V$), und wendet danach noch Gl. (68 a) und (68 b) an für $v = V+1$.

Damit der Koordinatenanfangspunkt C_{V+1} im Achsenpunkt der Austrittspupille liegt, muss der Wert von e_{V+1} so gewählt werden, dass

$$(70 a) \quad p_{V+1} = 0$$

wird. Nur dann hängt, wie man an Gl. (66 b) für $v=V+1$ sieht, die paraxiale « Austrittspupillen-Koordinate » u_{V+1} allein von der « Eintrittspupillen-Koordinate » u_0 ab und nicht auch noch von der Objektkoordinate y_0 . Nach (68 a) ist $p_{V+1} = 0$ dann und nur dann, wenn

$$(70 \text{ b}) \quad e_{V+1} = -p'_V/\chi'_V$$

ist. — Damit ausserdem die ebene Fläche Nr. $(V+1)$ die Gauss'sche Bildebene ist, muss der Wert von $(e-r)_{V+1}$ so gewählt sein, dass

$$(71 \text{ a}) \quad h_{V+1} = 0$$

wird. Nur dann hängt, wie man an Gl. (66 b) für $v=V+1$ sieht, die Bildkoordinate y_{V+1} allein von der Objektkoordinate y_0 ab, nicht auch noch von der Pupillenkoordinate u_0 . Aus (68 a) und (68 b) folgt, dass dann und nur dann $h_{V+1} = 0$ ist, wenn

$$(71 \text{ b}) \quad (e-r)_{V+1} = -q'_V/\psi'_V$$

ist.

Die Determinanten der Matrizen M' , M und E sind, wie man an Gl. (62) sieht, alle gleich 1 :

$$(72) \quad |M'| = 1 ; |M| = 1 ; |E| = 1.$$

Folglich sind auch die Determinanten der durch Gl. (65 a), (66 a), (67 a) definierten Matrizen gleich 1, insbesondere :

$$(73) \quad \begin{vmatrix} g & r \\ p & q \end{vmatrix} = 1.$$

Hieraus und aus (70 a), (71 a) folgt, dass

$$(74) \quad \begin{pmatrix} g/r & h/r \\ p & q \end{pmatrix}_{V+1} = \begin{pmatrix} 1/q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}_{V+1}$$

ist.

8. Die Lange'schen Konstruktionsdaten m, χ, ψ .

Das optische System kann man, bei der Wellenlänge λ_0 , durch die $(3V+2)$ unabhängig voneinander wählbaren Daten

$$(75) \quad r_0 m_1 e_1 r_1 m_2 e_2 r_2 \dots m_V e_V r_V m_{V+1}$$

beschreiben. Man kann es aber auch durch die $(3V+2)$ unabhängig voneinander wählbaren Daten

$$(76) \quad \chi_1 \psi_1 m_2 \psi_2 \chi_2 \dots m_{V+1} \chi_{V+1} \psi_{V+1}$$

beschreiben. Aus den bei (75) stehenden Daten m, e, r kann man e_{V+1} , r_{V+1} und alle paraxialen Koeffizienten mit Hilfe von (70 b), (71 b) und (68 a, b, c), (69) berechnen. Aus den bei (76) stehenden Daten m, χ, ψ kann man alle übrigen paraxialen Koeffizienten, alle Radien r , alle Entfernungen e und den Brechungs-

index m_1 mit Hilfe der nachfolgenden Formeln (77 a, b) berechnen. Die linke Spalte bei (77 a) folgt aus (68 c) und (69). Von der trivialen Gleichung $m'_V = m_{V+1}$ und den aus (68 a) folgenden Gleichungen $\chi'_V = \chi_{V+1}$; $\psi'_V = \psi_{V+1}$ abgesehen, folgt die mittlere Spalte bei (77 a) aus (68 b), (68 c), (73). Die rechte Spalte bei (77 a) folgt aus (68 b) und (74). Bei (77 b) folgt die linke Spalte aus (68 c), und die rechte aus (68 a).

$$(77 \text{ a})$$

	$v = 1 \dots V :$	
$m_1 = -\chi_1$	$m'_V = m_{V+1}$	
	$\chi'_V = \chi_{V+1}; \psi'_V = \psi_{V+1}$	
$r_0 = \frac{1}{\psi_1}$	$r = \frac{m' - m}{\chi\psi' - \chi'\psi}$	$r_{V+1} = \left(\frac{-m}{\chi\psi}\right)_{V+1}$
$\frac{p_0}{r_0} = 0$	$\frac{p}{r} = \frac{\chi'/m' - \chi/m}{1/m' - 1/m}$	$\left(\frac{p}{r}\right)_{V+1} = 0$
$\frac{q_0}{r_0} = \psi_1$	$\frac{q}{r} = \frac{\psi'/m' - \psi/m}{1/m' - 1/m}$	$\left(\frac{q}{r}\right)_{V+1} = \psi_{V+1}$
$\frac{g_0}{r_0} = 1$	$\frac{g}{r} = -\frac{\chi' - \chi}{m' - m}$	$\left(\frac{g}{r}\right)_{V+1} = -\left(\frac{\chi}{m}\right)_{V+1}$
$\frac{h_0}{r_0} = 0$	$\frac{h}{r} = -\frac{\psi' - \psi}{m' - m}$	$\left(\frac{h}{r}\right)_{V+1} = 0$

$$(77 \text{ b})$$

$v = 0 \dots V :$	$v = 1 \dots (V+1) :$
$p' = p ; q' = q$	$e_v = \frac{p_v - p_{v-1}}{\chi_v} \quad \text{oder} \quad = \frac{q_v - q_{v-1}}{\psi_v}$

M. LANGE [6] ⁽¹⁾ hat die monochromatischen Bildfehlerkoeffizienten 3. Ordnung explizit dargestellt als Funktionen der unabhängig voneinander wählbaren Daten m, χ, ψ allein ; LANGE verwendet die Variablen : m (bei ihm mit n bezeichnet), $-\chi/m$ (bei ihm mit β bezeichnet), $-\psi/m$ (bei ihm mit α bezeichnet). Die ursprünglichen Formeln von L. SEIDEL enthalten mehr Variable, als das optische System Freiheitsgrade hat, stellen also die Bildfehlerkoeffizienten 3. Ordnung nicht explizit dar als Funktionen von Daten, die unabhängig voneinander wären.

Statt χ und ψ kann man auch zwei andere paraxiale Koeffizienten zusammen mit m als (monochromatische) Konstruktionsdaten wählen, z. B. g und h , oder p und q . Auf diese und noch andere Möglichkeiten wollen wir aber hier nicht eingehen.

⁽¹⁾ Siehe auch : H. MARX [7], wo in Unkenntnis der LANGE'schen Arbeit eine gleiche Darstellung der Bildfehler 3. Ordnung gebracht wurde ; und H. MARX [8].

Nach § 6 werden die paraxialen Näherungswerte durch Ausdrücke mit zweireihigen Matrizen dargestellt als Funktionen der Strahl-Anfangsdaten t_0 u_0 x_0 y_0 und der gewöhnlichen Konstruktionsdaten m e r . Als Funktionen der Strahl-Anfangsdaten t_0 u_0 x_0 y_0 und der LANGE'schen Konstruktionsdaten m χ ψ dagegen werden die paraxialen Näherungswerte durch elementare Ausdrücke dargestellt. Z. B. ist nach Gl. (66 b) : $\underline{y} = g \cdot (y_0/r_0) + h \cdot u_0$, folglich wegen der Formeln (77 a) für g , h und r_0 :

$$\underline{y} = -\frac{\chi' - \chi}{\chi\psi' - \chi'\psi} \cdot (\psi_1 y_0) - \frac{\psi' - \psi}{\chi\psi' - \chi'\psi} \cdot u_0.$$

9. Linearisierte Durchrechnungsformeln bei Zugrundelegung der paraxialen Näherung.

Die in § 6 ermittelte paraxiale Näherung für $\bar{\eta}$; $\bar{\eta}$; t ; u ; x ; y ; t' ; u' legen wir jetzt den linearisierten Durchrechnungsformeln (40) bis (41') zugrunde; wir kennzeichnen dementsprechend die paraxialen Näherungswerte durch Überstreichen, nicht wie in § 6 durch Unterstreichen :

$$(78 \text{ a}) \quad \bar{\eta} = \chi \cdot (\psi_1 y_0) + \psi \cdot u_0; \quad \bar{\xi} = \chi \cdot (\psi_1 x_0) + \psi \cdot t_0;$$

$$(78 \text{ b}) \quad \bar{y} = g \cdot (\psi_1 y_0) + h \cdot u_0; \quad \bar{x} = g \cdot (\psi_1 x_0) + h \cdot t_0;$$

$$(78 \text{ c}) \quad \bar{u}' = \bar{u} = r \bar{\eta} + m \bar{y}; \quad \bar{t}' = \bar{t} = r \bar{\xi} + m \bar{x}.$$

Die Gl. (78 c) folgen aus (60), (59'). Die Gl. (78 a, b) folgen aus (65 b), (66 b); wir haben gemäss (77 a) $1/r_0 = \psi_1$ gesetzt. — Die Näherungswerte \bar{t} ; \bar{u} ; \bar{t}' ; \bar{u}' müssen, um den linearisierten Formeln zugrundegelegt werden zu können, den Beziehungen (27), (27') genügen. Dies ist nach Gl. (59), (59') der Fall (und nach § 4, letzter Satz, auch zu erwarten gewesen).

Der Näherungswert $\bar{\xi}$ ist durch Gl. (24') bestimmt; in Gl. (24') setzen wir jetzt

$$(79) \quad \bar{n} = n,$$

wobei n der Brechungsindex bei der jeweiligen Wellenlänge λ ist : $n = n(\lambda)$. — Der Näherungswert \bar{z} ist durch Gl. (24) bestimmt.

In den linearisierten Formeln (40) bis (41') stehen neben den durchzurechnenden Differenzen $\Delta \dots$, ausser den in den beiden vorigen Absätzen besprochenen Näherungswerten, noch die daraus gemäss (35) und (38) gebildeten Grössen ω^* ; t^* ; u^* und die entsprechenden gestrichenen Grössen.

Die Glieder mit der windschiefen Invariante I fallen jetzt weg, weil

$$(80) \quad I^* - I = 0$$

wird nach Einsetzen der paraxialen Näherung (78 a, b) in den Ausdruck (38) für I^* :

$$I^* = \bar{\eta} \bar{x} - \bar{\xi} \bar{y} = (\psi g - \chi h) \cdot [u_0(\psi_1 x_0) - t_0(\psi_1 y_0)],$$

folglich wegen

$(\psi g - \chi h) = 1$: $I^* = u_0(\psi_1 x_0) - t_0(\psi_1 y_0)$. Dass $(\psi g - \chi h) = 1$ ist, folgt aus den mittleren Gl. (77 a); man drücke g und h durch m , χ , ψ aus und setze die Ausdrücke in $(\psi g - \chi h)$ ein. — Ferner ist wegen (45 b') :

$$I = \eta'_0 x_0 - \xi'_0 y_0 = -\frac{1}{z_0} (u'_0 x_0 - t'_0 y_0), \text{ folglich wegen } z_0 = -r_0 = -1/\psi_1 \text{ und wegen } u'_0 = u_0; t'_0 = t_0 :$$

$$(81) \quad I = u_0(\psi_1 x_0) - t_0(\psi_1 y_0).$$

Also ist $I^* = I$.

Die zur Linearisierung vernachlässigten Glieder bei den Formeln (41), (41') haben die Grössenordnung $0(\alpha \Delta \alpha^2; \alpha \Delta \varepsilon)$. Da wir $\bar{n} = n$ gesetzt haben, ist $\Delta \varepsilon = 0$. Wegen Gl. (61 a, b) ist $0(\Delta \alpha) = 0(\alpha^3; \alpha \varepsilon)$, folglich

$$(82) \quad 0(\alpha \Delta \alpha^2; \alpha \Delta \varepsilon) = 0(\alpha^7; \alpha^5 \varepsilon; \alpha^3 \varepsilon^2).$$

Vernachlässigt sind also : monochromatische Bildfehler 7. Ordnung, primäre Farbfehler 5. Ordnung und sekundäre Farbfehler 3. Ordnung. — Hätten wir \bar{n} nicht, wie in Gl. (79), gleich dem wahren Brechungsindex $n = n(\lambda)$ gesetzt, sondern gleich einer Funktion $n^* = n^*(\lambda)$, die mit $n(\lambda)$ nur in 3 Angaben übereinstimmt (z. B. in einem mittleren Brechungsindex, in einer Abbe'schen Zahl v und in einer relativen Teildispersion θ), dann wären ausser den bei Gl. (82) festgestellten Bildfehlern noch tertiäre Farbfehler 1. Ordnung vernachlässigt, das sind zusammen lauter tertiäre Bildfehler. — In beiden Fällen ($\bar{n} = n$ und $\bar{n} = n^*$) können wir schreiben :

$$(83) \quad 0(\alpha \Delta \alpha^2; \alpha \Delta \varepsilon) = 0 \text{ (III)},$$

wenn wir mit III summarisch die Grössenordnungen tertiärer Aberrationen bezeichnen.

Bei Zugrundelegung der paraxialen Näherung erhalten wir also aus Gl. (40) bis (41') die linearisierten Durchrechnungsformeln :

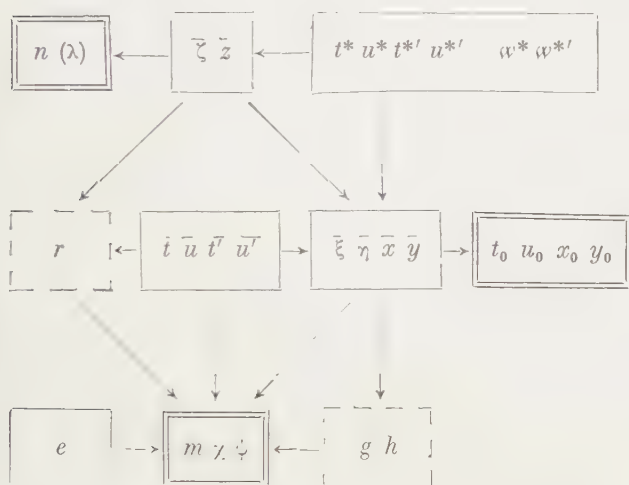
$$(84) \quad \Delta t_v = \Delta t'_{v-1} + e_v \Delta \xi_v; \quad \Delta u_v = \Delta u'_{v-1} + e_v \Delta \eta_v;$$

$$(85) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta x}{\bar{z}} &= \frac{\Delta \xi}{\bar{\xi}} - \frac{\Delta t}{\omega^*} + \frac{u^*}{\omega^*} \left(\frac{\bar{x}}{\bar{z}} \frac{\Delta \eta}{\bar{\xi}} - \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \frac{\Delta \xi}{\bar{\xi}} \right) + \\ &\quad + \frac{t^* - \bar{t}}{\omega^*} + 0(\text{III}) ; \\ \frac{\Delta y}{\bar{z}} &= \frac{\Delta \eta}{\bar{\xi}} - \frac{\Delta u}{\omega^*} - \frac{t^*}{\omega^*} \left(\frac{\bar{x}}{\bar{z}} \frac{\Delta \eta}{\bar{\xi}} - \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \frac{\Delta \xi}{\bar{\xi}} \right) + \\ &\quad + \frac{u^* - \bar{u}}{\omega^*} + 0(\text{III}) ; \end{aligned} \right.$$

$$(84') \quad \Delta t' = \Delta t; \quad \Delta u' = \Delta u;$$

$$(85') \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta \xi'}{\bar{\zeta}'} &= \frac{\Delta x}{\bar{z}} + \frac{\Delta t'}{\omega^{*'}} - \frac{u^{*'}}{\omega^{*'}} \left(\frac{\bar{\xi}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta y}{\bar{z}} - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta x}{\bar{z}} \right) - \\ &= \frac{t^{*'} - \bar{t}'}{\omega^{*'}} + 0 \text{ (III)} ; \\ \frac{\Delta \eta'}{\bar{\zeta}'} &= \frac{\Delta y}{\bar{z}} - \frac{\Delta u'}{\omega^{*'}} - \frac{t^{*'}}{\omega^{*'}} \left(\frac{\bar{\zeta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta y}{\bar{z}} - \frac{\bar{\eta}'}{\bar{\zeta}'} \frac{\Delta x}{\bar{z}} \right) - \\ &= \frac{u^{*'} - \bar{u}'}{\omega^{*'}} - 0 \text{ (III)} , \end{aligned} \right.$$

worin alle Grössen (ausser den Differenzen $\Delta \dots$) nach folgendem Schema auszudrücken sind durch die Strahl-Anfangsdaten $t_0 u_0 x_0 y_0$, die LANGE'schen Konstruktionsdaten $m \chi \psi$ und die variablen Brechungsindizes $n = n(\lambda)$:



gemäss den Formeln:

$$\begin{aligned} (24), (24'), (79) \text{ für } \bar{\xi} \bar{z} ; \{ (35), (38) \} \text{ für } \{ t^* u^* \omega^* \} ; \\ (35'), (38') \} \\ (77 \text{ a}) \text{ für } r ; (78 \text{ c}) \text{ für } \bar{t} \bar{u} \bar{t} \bar{u} ; (78 \text{ a, b}) \text{ für } \bar{\xi} \bar{\eta} \bar{x} \bar{y} ; \\ (77 \text{ b}) \text{ für } e ; (77 \text{ a}) \text{ für } g \quad h . \end{aligned}$$

In der entsprechenden Weise wie mit Gl. (40) bis (41'), wird auch mit den linearisierten Brechungsformeln (51'), mit denen die Durchrechnung beginnt, verfahren, und mit den linearisierten Übergangsformeln (50), (51), mit denen die Durchrechnung aufhört.

Man braucht jetzt nur noch diese linearen Formeln in Matrizenform zu schreiben, dann kann man die Spalten mit den Differenzen inmitten des Systems eliminieren und erhält die Lateralaberration (Δx_{V+1} ; Δy_{V+1}) in Matrizenform explizit dargestellt als Funktion der LANGE'schen Konstruktionsdaten $m \chi \psi$, der Brechungsindizes $n = n(\lambda)$ und der Strahl-Anfangsdaten $t_0 u_0 x_0 y_0$. (Die Differenzen $\Delta t_0 \Delta u_0 \Delta x_0 \Delta y_0$ am Anfang treten nicht auf, weil sie null sind.)

10. Darstellung der Lateralaberration bei Meridianstrahlen.

Bei Meridianstrahlen, die in der y, z -Ebene verlaufen, vereinfachen sich die linearisierten Durchrechnungsformeln (84) bis (85'). Wir schreiben diese Formeln für Meridianstrahlen jetzt in Matrizenform. Mit den Abkürzungen

$$(86 \text{ a}) \quad N' \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\omega^{*'}} + \delta' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; N \equiv \begin{pmatrix} 1 & \frac{+1}{\omega^*} - \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$F \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{\zeta} e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(86 \text{ b}) \quad \delta' \equiv \frac{u^{*'} - \bar{u}'}{\omega^{*'}}; \quad \delta \equiv \frac{u^* - \bar{u}}{\omega^*}$$

ist:

$$(87') \quad \begin{pmatrix} -\Delta \eta' / \bar{\zeta}' \\ \Delta u' \\ 1 \end{pmatrix} = N' \cdot \begin{pmatrix} -\Delta y / \bar{z} \\ \Delta u' \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \text{ (III)} ;$$

$$\begin{pmatrix} -\Delta y / \bar{z} \\ \Delta u' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta y / \bar{z} \\ \Delta u \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(87) \quad \begin{pmatrix} -\Delta y / \bar{z} \\ \Delta u \\ 1 \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} -\Delta \eta / \bar{\zeta} \\ \Delta u \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \text{ (III)} ;$$

$$\begin{pmatrix} -\Delta \eta / \bar{\zeta} \\ \Delta u \\ 1 \end{pmatrix}_V = F_V \cdot \begin{pmatrix} -\Delta \eta' / \bar{\zeta}' \\ \Delta u' \\ 1 \end{pmatrix}_{V-1} .$$

Die Formeln (87') gelten auch für die (formale) Brechung an der Fläche Nr. 0 (Objektebene), wie man aus (51') schliessen kann; Δy_0 und $\Delta u'_0 = \Delta u_0$ sind gleich null. Die Formeln (87) gelten auch für den Übergang zur Fläche Nr. $V+1$ (Bildebene), wenn man $-\Delta y / \bar{z}$ ersetzt durch $-\Delta y / z^*$, wobei

$$(88) \quad z^*_{V+1} \equiv -(\omega^* / \bar{\zeta})_{V+1} = -r_{V+1} + (\bar{y} \bar{\eta} / \bar{\zeta})_{V+1}$$

ist; dies folgt aus Gl. (50) bis (52) und Gl. (47). — Die Formeln (86 a) und (87') (87) sind ähnlich gebaut wie die paraxialen Formeln (62) und (63'), (63); und wir erhalten ähnlich wie bei der paraxialen Näherung:

$$(89) \quad \begin{pmatrix} -\Delta y / z^* \\ \Delta u \\ 1 \end{pmatrix}_{V+1} = N_{V+1} F_{V+1} N'_V N_V F_V \dots \dots N'_1 N_1 F_1 N'_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \text{ (III)} ;$$

Über einige Experimente zur Phasenkontrast-Mikroskopie *

von Kurt RÄNTSCH, Oberkochen

ZUSAMMENFASSUNG. — Für eine kontrastreiche Wiedergabe beim Phasenkontrastverfahren bestehen hinsichtlich der notwendigen Ausgestaltung der Phasenlamelle des Objektives auf Grund theoretischer Ableitungen insbesondere zwei Auffassungen. Ist $\Delta\psi$ die Phasendifferenz einer Objektstelle und $\Delta\psi$ die des Phasenringes im Objektiv gegenüber ihrer Umgebung, und ist D die Durchlässigkeit dieses Phasenringes, so fordert die eine Auffassung ein $\Delta\psi = f(\Delta\psi)$ und $D = F(\Delta\psi)$, die andere Auffassung jedoch ein $\Delta\psi = \text{const.} = \frac{\pi}{2}$ und $D = G(\Delta\psi)$.

Die Ausbeute des Schrifttums an experimentellen Ergebnissen, die über die Richtigkeit oder auch nur die grössere Berechtigung der einen oder der anderen Auffassung eindrucklich zu entscheiden gestalten, ist gering und reicht für eine Klärung der aufgeworfenen Frage nicht aus. Es erschien daher reizvoll, eine Einrichtung zu ersinnen, mit der sich diese Verhältnisse quantitativ untersuchen und damit die gestellte Frage womöglich einer Lösung zuführen lässt (1950).

SUMMARY. — To obtain high contrast using the phase-contrast method two theories suggest different forms of phase-plate. If $\Delta\psi$ is the phase difference in the object and $\Delta\psi$ that of the phase-plate in the objective and if D is the transmission of the annulus one theory gives $\Delta\psi = f(\Delta\psi)$ et $D = F(\Delta\psi)$ the other gives $\Delta\psi = \text{const.} = \frac{\pi}{2}$ et $D = G(\Delta\psi)$.

Previous experimental work has failed to discriminate the correctness of one or other theory. An experimental procedure to investigate this has therefore been devised.

SOMMAIRE. — Pour obtenir un fort contraste en utilisant la méthode du contraste de phase, deux théories permettent d'établir la forme de la lame de phase. Si $\Delta\psi$ représente une variation de phase dans l'objet et $\Delta\psi$ la différence de phase introduite par l'anneau de phase et si D est la transparence de cet anneau de phase, l'une des théories donne :

$$\Delta\psi = f(\Delta\psi) \text{ et } D = F(\Delta\psi) \text{ l'autre donne : } \Delta\psi = \text{const.} = \frac{\pi}{2} \text{ et } D = G(\Delta\psi).$$

Les résultats des travaux expérimentaux publiés jusqu'à maintenant ne permettent pas de déterminer l'exactitude de l'une ou de l'autre théorie. Un dispositif expérimental permettant d'étudier ces relations a été mis au point.

Um ein volles Verständnis der durchgeführten Versuche sicherzustellen, sei einleitend ganz kurz auf die Vorstellung über die Bildentstehung im Mikroskop hingewiesen, wie sie von Abbe in die Theorie der optischen Instrumente eingeführt wurde (Bild 1).

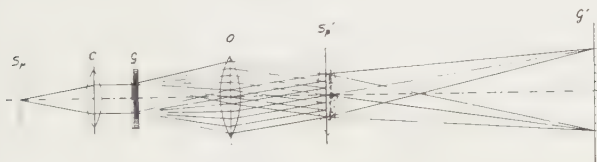


BILD 1. — Strahlengang des Mikroskops. Sp : Beleuchtungsspalt. C : Kondensor. G : Gitter als Objekt ($b' = b = 0,1 \text{ mm}$; $d = 0,2 \text{ mm}$). O : Objektiv. Sp' : primäres Bild im hinteren Brennpunkt von O. G' : sekundäres Bild.

Als Objekt diente ein sogenanntes Amplitudengitter, d. h. ein Gitter aus durchsichtigen Spalten zwischen undurchsichtigen Stegen, das mit parallelstrahligem Licht durchleuchtet wird. In der hinteren Brennebene des Mikroskopobjektives entsteht als « primäres » Bild das Beugungsspektrum des Gitters und in der dem Gitter geometrisch-optisch konjugierten Ebene entsteht als « sekundäres » Bild eine Abbildung des Gitters, die als die Interferenzerscheinung des primären Bildes zu beschreiben ist. Das sekundäre Bild zeigt nach Struktur und Kontrast eine Darstellung des Gitters resp. des Objekts, der die in der Austritts-

pupille des Objektives vorhandene Spektrenanordnung resp. Lichtverteilung nach Lage, Intensität und Phasenbeziehung der Maxima entspricht. Ein Eingriff irgendwelcher Art in das primäre Bild verursacht eine Änderung des sekundären Bildes. Da bereits rein geometrisch die Pupille niemals das gesamte Beugungslicht eines Objekts aufnimmt, insbesondere wenn es sich um kleine Objekte handelt, so ist das sekundäre Bild niemals das genaue Abbild des Objekts; die Ähnlichkeit ist jedoch umso grösser, je grösser der aufgenommene Teil der dem Objekt eigenen Beugungsfigur ist. Bekannt sind die eindrucksvollen Versuche mit dem Abbe'schen Diffraktionsapparat zum Mikroskop, mit dem insbesondere einfache geometrische Eingriffe in das primäre Bild vorgenommen werden.

Der Aufbau für die vorliegenden Versuche war nichts anderes als eine vergrösserte Ausführung eines solchen Diffraktionsapparates, jedoch für Auflichtbeleuchtung im monochromatischen Licht und bei Verwendung eines speziellen Reflexionsgitters als Objekt (Bild 2).

Im primären Bild, in der hinteren Brennebene des langbrennweitigen Objektives, mit dem das Objekt kollimiert wird, d. h. am Ort der Bilder des Beleuchtungsspaltes, befindet sich ein Phasenschieber für das Null-Licht (Bild 2 a). Die Eichung der durch eine Mess-Schraube betätigten Keilverschiebung lässt jeden Wert von $\Delta\psi$ innerhalb eines Bereiches von mehreren Wellenlängen auf Grade genau einstellen.

Die Schwächung von Null- bzw. Beugungslicht ist bei

* Vortrag auf der 55. Tagung (1954) der Deutschen Gesellschaft für angewandte Optik in Göttingen am 10.6.1954.

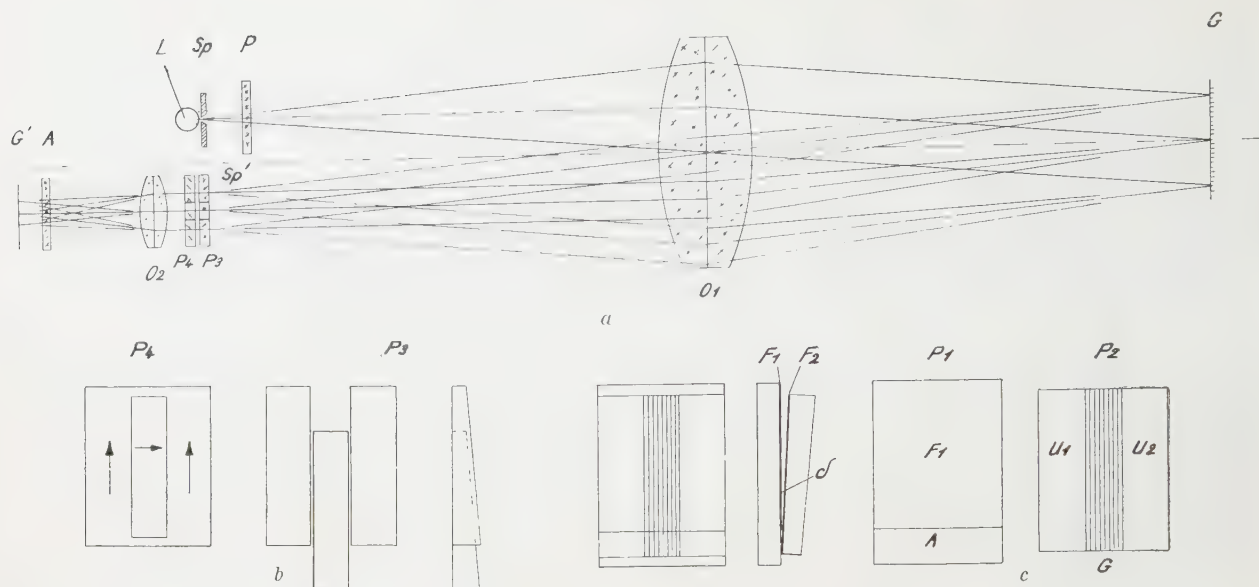


BILD 2. — Strahlengang des Versuchsaufbaus.

a) L: Natriumspektrallampe, Sp: Spaltblende, P: Polarisationsfilter, O₁: Objektiv ($f' = 2\,300\text{ mm}$), G: Reflexionsgitter, Sp': primäres Bild, O₂: Tubulinse ($f' = 760\text{ mm}$), G': sekundäres Bild, A: Analysator, P₃, P₄: Phasenschieber.

b) P₄: Anordnung der doppelbrechenden Folie, P₃: Aufteilung der Keilplatte zur Phasenänderung im nullten Maximum.

c) Aufbau des Reflexionsgitters.

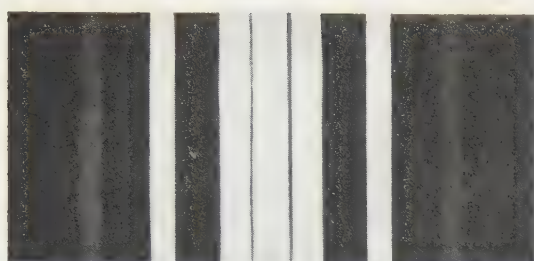
Verwendung polarisierten Lichtes in folgender Weise ohne Phasenänderung möglich: Die Beleuchtung erfolgt mit linear polarisiertem Licht, wobei die Schwingungsrichtung parallel oder senkrecht zu den Gitterstrichen gewählt wird. Durch einen passend dimensionierten Folienstreifen aus doppelbrechendem Material, der zwischen zwei gute Planplatten gekittet und vor dem Bild des Null-Maximums angebracht ist, wird das hier durchtretende Licht in der Schwingungsrichtung um 90° gedreht (Bild 2 b). Ein Analysator am Okular der Beobachtungsoptik lässt nur gleichschwingende und damit interferenzfähige Komponenten beider Lichter durchtreten. In der 45° Stellung ist der Durchlässigkeitswert $D = 1$ vorhanden, andere Durchlässigkeitswerte werden in bekannter Weise durch Drehen des Analysators aus dieser 45° Stellung heraus eingestellt. Die Einrichtungen zur Änderung der Phase und die zur Änderung der Durchlässigkeit der Phasenlamelle sind also völlig unabhängig voneinander.

Das Wichtigste und Schwierigste für die Durchführung der Versuche war die Erstellung eines geeigneten, eichfähigen Phasenobjektes, das erst nach einer Reihe von Misserfolgen in brauchbarer Form geschaffen werden konnte. Es besteht in seiner letzten Modifikation aus einem kombinierten Amplituden- und Phasengitter, wobei das Phasengitter in der Richtung der Gitterstriche eine stetig verlaufende lineare (keilförmige) Phasendifferenz aufweist, die sich von 0 bis 2π mehrfach wiederholt, also gleichzeitig darbietet, und die sich während der Beobachtung interferenziell überwachen lässt. Es handelt sich um ein Reflexionsgitter des in Bild 2c gezeigten Aufbaus.

Die Fläche F_1 der Planplatte P_1 ist bis auf den Teil A voll verspiegelt. Die Fläche F_2 der Keilplatte P_2 enthält einen mittleren Streifen G, der in gleicher Weise voll verspiegelt wurde und in den ein Gitter geteilt ist, während die äusseren Felder U_1 und U_2 einen durchlässigen Spiegelbelag aufweisen. Die einander zugekehrten Flächen F_1 und F_2 , deren Zwischenraum mit Immersionsöl ausgefüllt wurde, bilden einen Keil mit kleinem Winkel δ und damit ein Reflexions-Phasengitter mit in Richtung der Gitterstriche linear ansteigender Phase $\Delta\varphi$, die durch die Interferenzstreifen, die sich in den Bereichen U_1 und U_2 des Reflexionskeiles ausbilden, geeicht werden kann. Im unteren Teil von G, wo der Reflexionsbelag auf F_2 fehlt, entsteht ein Amplitudengitter gleicher Teilung.

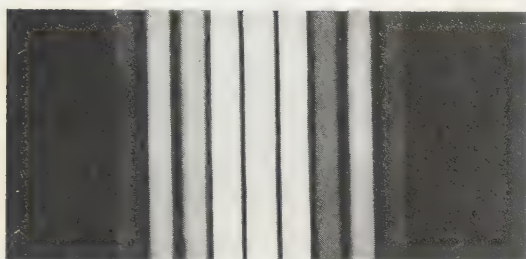
In einer Reihe von Lichtbildern soll gezeigt werden, wie das Bild eines derartigen Gitters aussieht, wenn man es in dem vorher beschriebenen Versuchsaufbau als Objekt verwendet.

Betrachtet man zunächst das primäre Bild eines sogenannten Rastergitters (d. h. Spaltbreite = Stegbreite), so zeigt sich, dass erwartungsgemäss ausser dem nullten Maximum nur die ungeraden Maxima auftreten, während die geraden Maxima fehlen. Das ist bei der vollkommenen Ausführung des Rastergitters (Steg = Spalt), Bild 3a, vollständig erreicht, bei der unvollkommenen Ausführung (Steg \sim Spalt), Bild 3b, jedoch nur angenähert der Fall. Das gilt sowohl für das Amplitudengitter, als auch für das Phasengitter. Bezüglich der geometrischen Anordnung der Beugungsmaxima zeigen die primären Bilder von Amplituden- und Phasengitter keinen Unterschied; wohl aber bezüglich der Verteilung der Intensität auf die



Vollkommenes

Rastergitter



Unvollkommenes

Rastergitter

Beugungsspektren.

BILD 3. — Primäres Bild des Reflexionsgitters nach Bild 2c.

verschiedenen Maxima und hinsichtlich der Phasenbeziehung zwischen dem Licht der Beugungsspektren und dem Null-Licht. Das zeigt sich deutlich an den von diesen primären Bildern erzeugten sekundären Bildern.

a

b

Bild 4 zeigt nun die Darstellung des Versuchsgitters als Sekundärbild des vorher gezeigten Primärbildes eines vollkommenen Rastergitters. Im unteren Teil des Bildes befindet sich das Amplitudengitter und in seiner Verlängerung das keilige Phasengitter. Man bemerkt, dass letzteres nicht vollkommen unsichtbar ist. Man sieht vielmehr eine schwache Doppelstruktur, die sich im Rhythmus der rechts und links neben dem Gitter sichtbaren interferenziellen Eichskala mehrfach wiederholt. Sie liegt an den Stellen $\Delta\varphi \sim 180^\circ$. Es ist nicht so, — wie schlechthin angenommen — dass das Phasengitter überhaupt nicht sichtbar ist, es wird als Gitter doppelter Feinheit abgebildet, wenn auch mit schlechtem Kontrast, da das Null-Licht i. A. das Beugungslicht zu stark überwiegt, ausser bei $\Delta\varphi = \pm 180^\circ$, wo das Null-Licht verschwindet. Die neben dem Gitter sichtbaren Interferenzstreifen dienen als Eichskala für die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ (Steg-Spalt) des Phasengitters. Der sichtbare Versatz zwischen der Phase des Gitters und der Eichskala beruht auf dem Phasensprung beider Reflexionsbeläge. Seine Bestimmung ist aus der Bildreihe selbst möglich und gleich dem bei allen Aufnahmen konstanten Sprung zwischen der Interferenzlinie und der Stelle des Phasengitters, für die $\Delta\varphi = 180^\circ$, das ist die Stelle maximaler Streuung, die gekennzeichnet ist durch Tausch von Steg und Spalt. Diese Doppelstruktur ist die Folge des durch die Begrenzung der Apertur unvermeidlichen Unterdrückens der höheren Ordnungen im primären Bild; sie entspricht jedoch nicht der Wirklichkeit.

Bild 5 zeigt den ersten zusätzlichen Eingriff in das

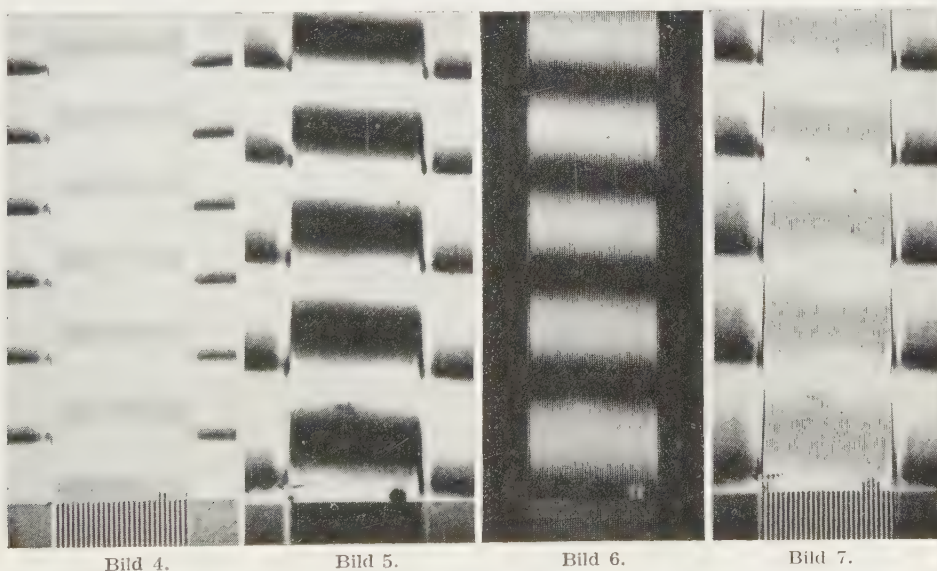


Bild 4.

Bild 5.

Bild 6.

Bild 7.

BILD 4. — Reflexionsgitter ohne Beeinflussung des primären Bildes; Beugungslicht beidseitig bis zur dritten Ordnung wirksam.

BILD 5. — Reflexionsgitter bei Ablendung des gesamten Beugungslichtes, Wirkung nur der nullten Ordnung.

BILD 6. — Reflexionsgitter, Wirkung nur des Beugungslichtes; nulltes Maximum abgelenkt.

BILD 7. — Reflexionsgitter ohne Beeinflussung des primären Bildes; Beugungslicht nur bis zur ersten Ordnung.

primäre Bild. Es wirkt nur das Null-Licht, während das gesamte Beugungslicht abgeblendet ist. Das entstehende sekundäre Bild ist ausserordentlich interessant. Zunächst einmal ist — wie zu erwarten — im Bild des Amplitudengitters jegliche Struktur verschwunden; es erscheint hier eine homogene graue Fläche. Das gleiche gilt für das Phasengitter. Es zeigt keinerlei Gitterstruktur, dafür aber eine Querstreifung im Rhythmus der Eichskala: Bei $\Delta\varphi = 0^\circ$ besteht volle Helligkeit, bei $\Delta\varphi = 180^\circ$ völlige Dunkelheit, wobei diese Bereiche in Abhängigkeit von $\Delta\varphi$ verlaufend ineinander übergehen. Die Ursache ist, dass das Phasengitter in Abhängigkeit von $\Delta\varphi$ streut und zwar ist die Streuung Null für $\Delta\varphi = 0^\circ$ und ein Maximum für $\Delta\varphi = 180^\circ$.

Bild 6 zeigt die Gegenprobe: Hier ist das Null-Licht abgeblendet und es wirkt nur das Beugungslicht; es handelt sich also um eine zentrale Dunkelfeldbeleuchtung. Soweit das Phasengitter überhaupt streut, werden Phasengitter und Amplitudengitter gleichartig als Gitter doppelter Strichzahl ($d' = d/2$) abgebildet. Dort wo $\Delta\varphi = 0^\circ$ ist kein Streulicht vorhanden; hier sind die Gitterbereiche strukturlos dunkel wie die nichtstreuende Umgebung.

Bild 7 zeigt nochmals die Abbildung mit Null-Licht und Beugungslicht, jedoch nur die erste Ordnung. In der Nähe der Stellen $\Delta\varphi = 180^\circ$ erscheint ein Gitter doppelter Feinheit, bei $\Delta\varphi = 0^\circ$ ist keinerlei Struktur sichtbar. Zwischen diesen Stellen erfolgt jedoch nirgends eine Abbildung des Phasen-

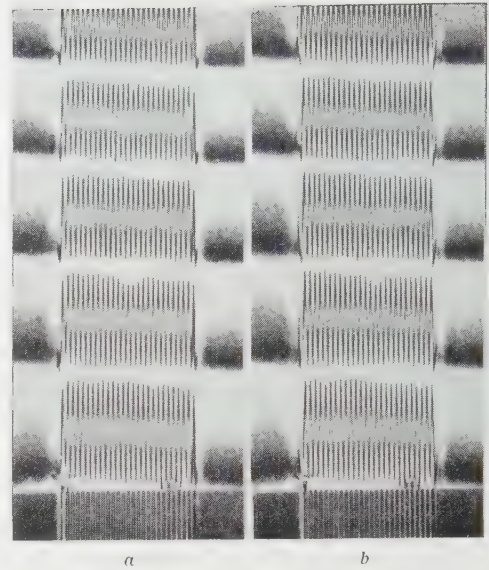


BILD 8. — Reflexionsgitter des Null-Lichtes im primären Bild.

- a) Phasenänderung $\Delta\psi = +90^\circ$.
b) Phasenänderung $\Delta\psi = -90^\circ$.

gitters in der Art eines Amplitudengitters, obgleich zwischen diesen Stellen alle Verhältnisse der Intensität von Null-Licht zu Beugungslicht von 0 : 1 bis 1 : 0 auftreten. Die erste experimentelle Bestätigung der Theorie lautet: Durch eine Änderung allein des Intensitätsverhältnisses zwischen Null-Licht und Beu-

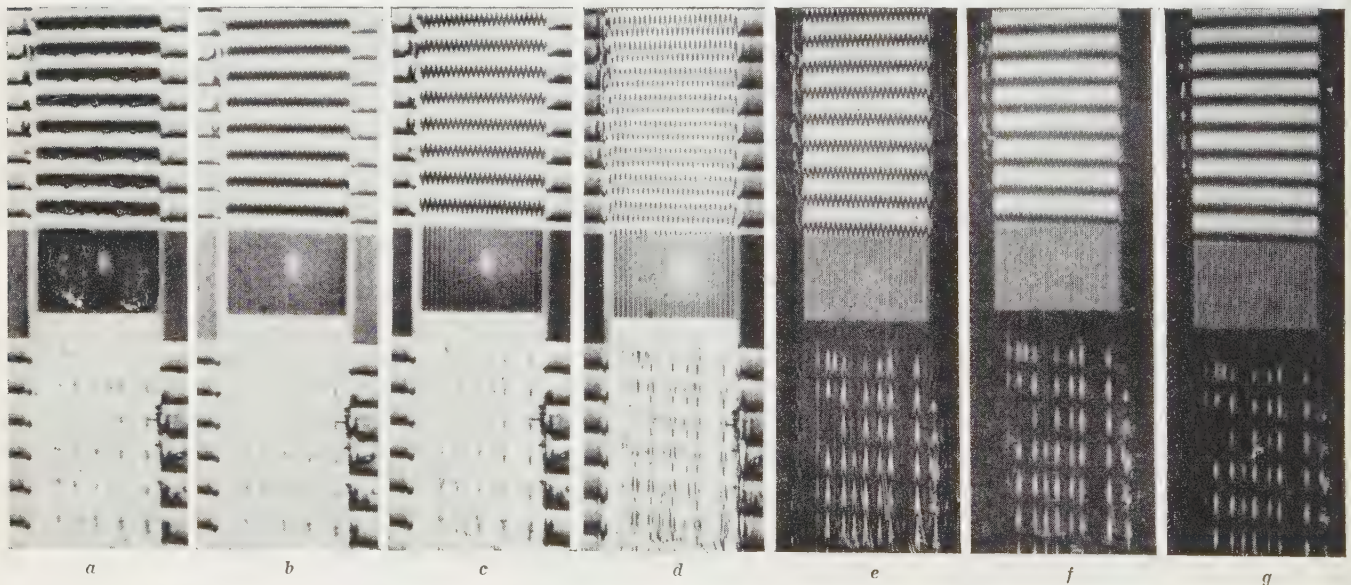


BILD 9. — Reflexionsgitter, Phasenänderung des Null-Lichtes im primären Bild, $\Delta\psi = +90^\circ$. Variationen der Durchlässigkeit:

- a) $D = \infty$ Abblendung des Beugungslichtes.
b) $D < \infty$
c) $D > 1$
d) $D = 1$
e) $D < 1$
f) $D > 0$
g) $D = 0$ Abblendung des nullten Maximum.

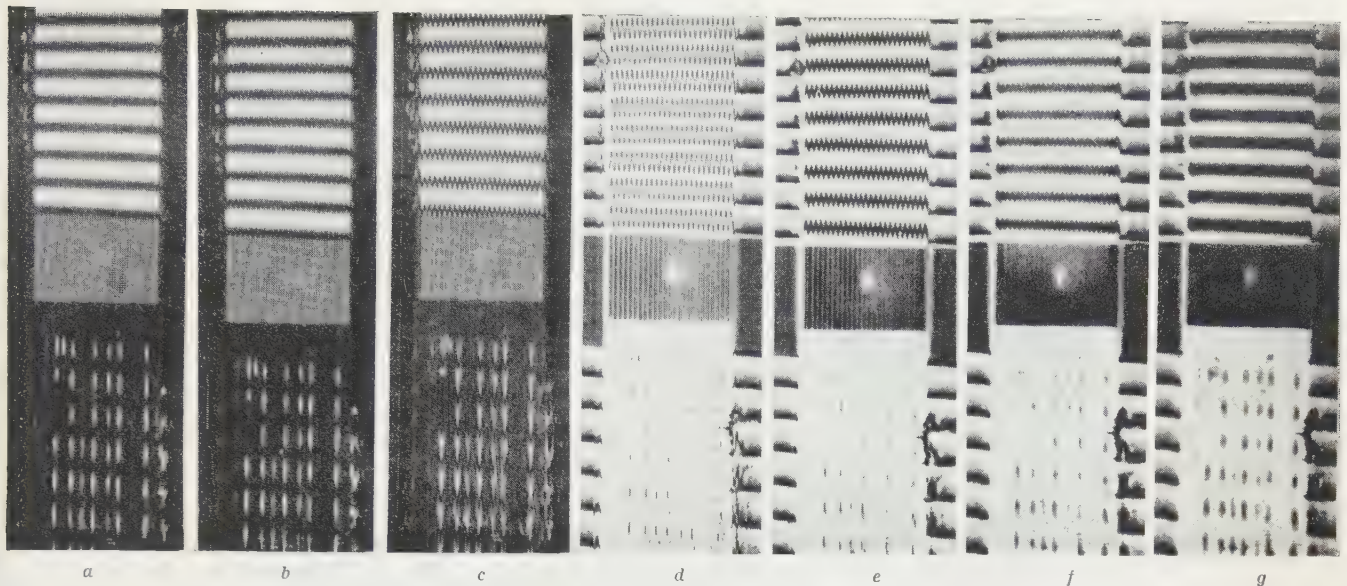


BILD 10. — Reflexionsgitter, Phasenänderung des Null-Lichtes im primären Bild, $\Delta\psi = -90^\circ$.
Variationen der Durchlässigkeit :

- | | |
|-----------------|---------------------------------|
| a) $D = 0$ | Abblendung des nullten Maximum. |
| b) $D > 0$ | |
| c) $D < 1$ | |
| d) $D = 1$ | |
| e) $D > 1$ | |
| f) $D < \infty$ | |
| g) $D = \infty$ | Abblendung des Beugungslichtes. |

gungslicht lassen sich Phasengitter nicht als wirkliche (d. h. « einfache ») Amplitudengitter sichtbar machen. Die Ursache für die andere Abbildung des Amplitudengitters, die trotz geometrisch gleicher Anordnung der Spektren im primären Bild auftritt, muss also in einem Unterschied der Phasenrelationen zwischen Null-Licht und Beugungslicht bestehen.

Bild 8 zeigt den ersten Eingriff physikalischer Art in das primäre Bild, und zwar ist bei a) dem Null-Licht eine Phasendifferenz $\Delta\psi = +90^\circ$, bei b) eine Phasendifferenz $\Delta\psi = -90^\circ$ gegenüber dem Beugungslicht erteilt. Das Amplitudengitter ist dabei nicht verschwunden, sondern es zeigt sich als Gitter doppelter Feinheit, d. h. es stellt sich etwa so dar, wie das Phasengitter im Bereich $\Delta\varphi = 180^\circ$ in Bild 4 und 7. Das Phasengitter zeigt eine im ersten Augenblick überraschende Struktur: Im Bereich von $\Delta\varphi = +180^\circ$ bis $\Delta\varphi = -180^\circ$ entstehen zwei gegeneinander um Strichbreite versetzte und im Rhythmus der Eichskala wiederkehrende Amplitudengitter, deren Kontrast in bestimmter Weise von $\Delta\varphi$ abhängt. Dieser Kontrast ist optimal bei $\Delta\varphi = \pm 90^\circ$ und er ist Null bei $\Delta\varphi = 0^\circ$. Bei $\Delta\varphi = \pm 180^\circ$ zeigt sich wieder die bekannte Doppelstruktur des Gitters.

Es bedarf keiner weiteren Massnahme als $\Delta\psi = 90^\circ$, um das Phasengitter von $\Delta\varphi > 0^\circ$ bis $\Delta\varphi < 180^\circ$ als Amplitudengitter sichtbar zu machen. Dabei ist der auftretende Kontrast eine Funktion von $\Delta\varphi$, könnte also zur Messung dieser Grösse verwendet werden. Um diesen Kontrast zu verbessern, kann man

zusätzlich zu $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ das Intensitätsverhältnis nach Bild 9 und 10 zwischen Null-Licht und Beugungslicht variieren. Dämpft man das Null-Licht, so wandert der beste Kontrast zu Stellen mit kleinerem $\Delta\varphi$, dämpft man das Beugungslicht, so wandert der beste Kontrast zu Stellen mit grösserem $\Delta\varphi$. Einer anderen Wahl von $\Delta\psi$ bedarf es hierbei nicht.

Der Vollständigkeit halber sei nun noch in Bild 11 gezeigt, dass das Phasenkontrastverfahren, wenn es sich nur um eine qualitative Sichtbarmachung von Phasenstrukturen als Amplitudenstrukturen handelt, nicht sehr empfindlich ist. Es wurde daher ausser $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ auch einmal $\Delta\psi = \pm 60^\circ$ und $\Delta\psi = \pm 120^\circ$ eingestellt. Hierbei ist das Amplitudengitter zwar auch verdoppelt, doch ist es unsymmetrisch; nur $\Delta\psi = 90^\circ$ zeigt das Amplitudengitter als sauberes Doppelgitter. Im Phasenbereich zeigen sich nur geringe Unterschiede in der Darstellung. Verwendet man jedoch die Symmetrie des Amplitudengitters mit als Kriterium für die richtige Einstellung des $\Delta\psi$, so zeigt sich leicht die optimale Darstellung des Phasengitters für $\Delta\psi = \pm 90^\circ$.

Reine Phasenproben lassen sich sichtbar machen, soweit ein ausreichender Streulichtanteil vorhanden ist; dazu ist neben einem konstanten $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ das D passend zu wählen und zwar:

- | |
|--|
| $D = 1$ für $\Delta\varphi = 90^\circ$, |
| $D < 1$ für $\Delta\varphi < 90^\circ$ und |
| $D > 1$ für $\Delta\varphi > 90^\circ$. |

Bei $D = 1$ wird dabei mit $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ für $\Delta\varphi$ etwa ein Bereich von $30^\circ - 150^\circ$ brauchbar dargestellt. Es bedarf also für reine Phasenproben einer Phasenkontrasteinrichtung bei der nur die Durchlässigkeit der Phasenlamelle variabel ist.

(Für einen Objektkontrast $K \neq 0$ d. h. für absorbierende Phasenproben zeigt sich, dass selbst die bei $\Delta\varphi \sim 0$ bereits relativ guten Kontraste durch eine passende Wahl von $\Delta\psi$ und D noch gesteigert werden können. Das erforderliche $\Delta\psi$ bleibt hier kleiner als 90° . Hierüber stehen jedoch noch keine Aufnahmen für quantitative Aussagen zur Verfügung, da diese Versuche mit vollkommeneren Mitteln wiederholt werden sollen.)

Gegen die Versuche mit dem Rastergitter lässt sich einwenden, dass seine Symmetrie einen speziellen Fall darstellt, für den unabhängig von $\Delta\varphi$ eine Phasenlamelle mit $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ als optimal zu gelten hat. Daher wurde die gesamte Versuchsreihe noch mit Gittern wiederholt, bei denen Spalt und Steg in der Breite verschieden waren ($b' \neq b$). Das Ergebnis war praktisch das gleiche, was wegen der relativen Unempfindlichkeit des Verfahrens hinsichtlich der Phasendifferenzen in der Phasenlamelle des Objektivs (vergleiche Bild 11) nicht überrascht. Es wurde — um den Extremfall des Gitters ($b' \gg b$) und zugleich das diskrete Einzelobjekt zu erfassen — das Reflexionsobjekt nun zusätzlich auf der anderen Seite

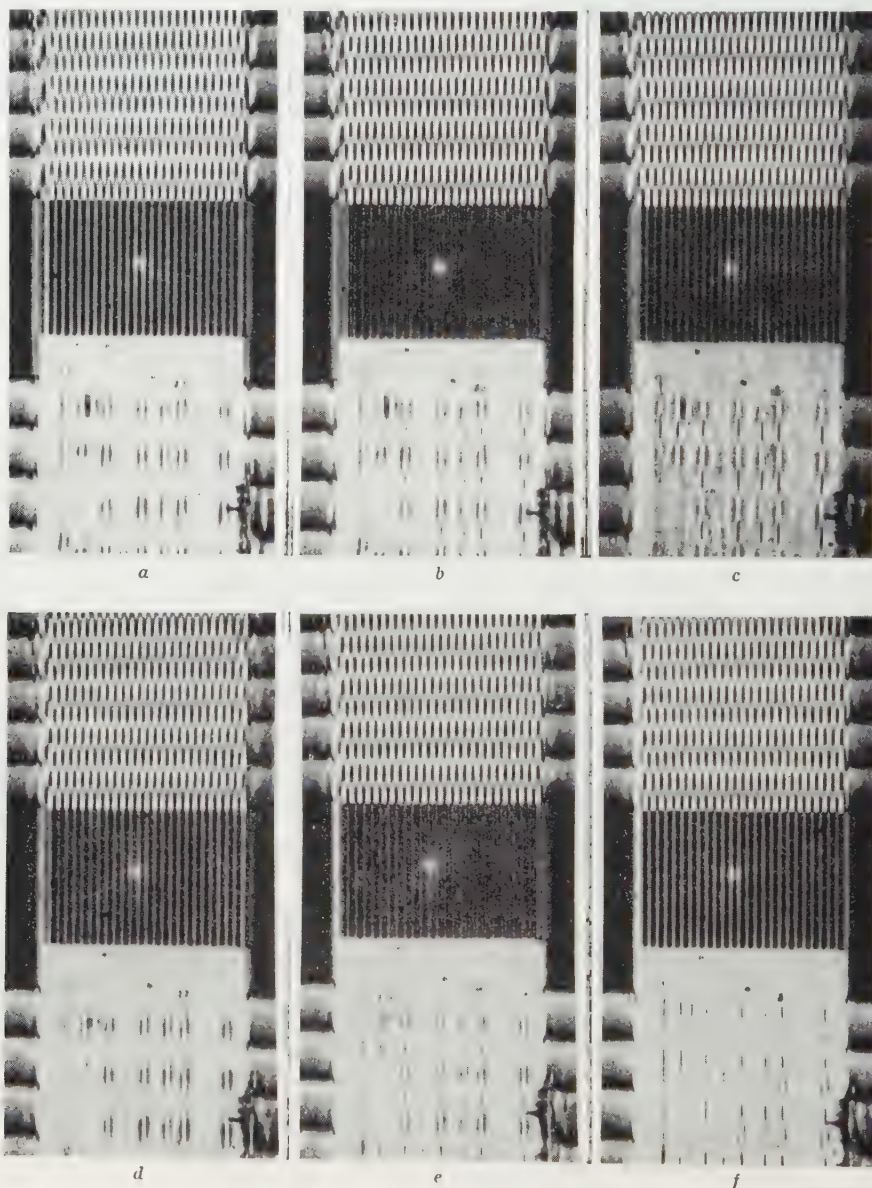


BILD 11. — Reflexionsgitter, Phasenänderung im primären Bild.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $\Delta\psi = -120^\circ$ | d) $\Delta\psi = +120^\circ$ |
| b) $\Delta\psi = -90^\circ$ | e) $\Delta\psi = +90^\circ$ |
| c) $\Delta\psi = -60^\circ$ | f) $\Delta\psi = +60^\circ$ |

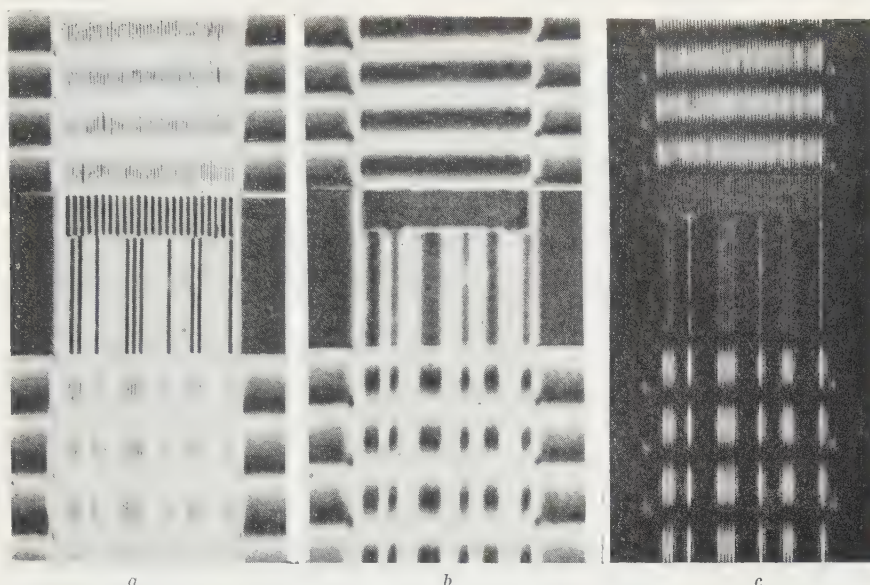


BILD 12. --- Reflexionsgitter mit Einzel- und Mehrfachstrichen.

- a) Ohne Eingriff im primären Bild.
 b) Wirkung nur des nullten Maximum.
 c) Wirkung des Beugungslichtes beidseitig bis zur ersten Ordnung.

des Amplitudengitterbereiches mit Einzelstrichen, Doppel- und Dreifach-Strichen stetigen Phasenverlaufs ausgestattet und die Wiedergabe dieser Einzelheiten gemeinsam mit den Gittern untersucht.

Bild 12 zeigt das neue Phasenobjekt ; bei a) das sekundäre Bild ohne Eingriff in das primäre Bild, bei b) die Wirkung nur des Null-Lichtes und c) die Wirkung des Beugungslichtes.

Bild 13 zeigt das sekundäre Bild bei einem Phasensprung in der Phasenlamelle a) bei $\Delta\psi = +90^\circ$ und b) bei $\Delta\psi = -90^\circ$. Es zeigt sich, dass das Gitter und die Einzelstriche in gleicher Weise unabhängig von $\Delta\phi$ mit $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ optimal wiedergegeben werden : Eine Schar von Einzelstrichen wird genau so abgebildet wie die Einzelstriche selbst, ist doch die elementare Beugungserscheinung an jedem Einzel-

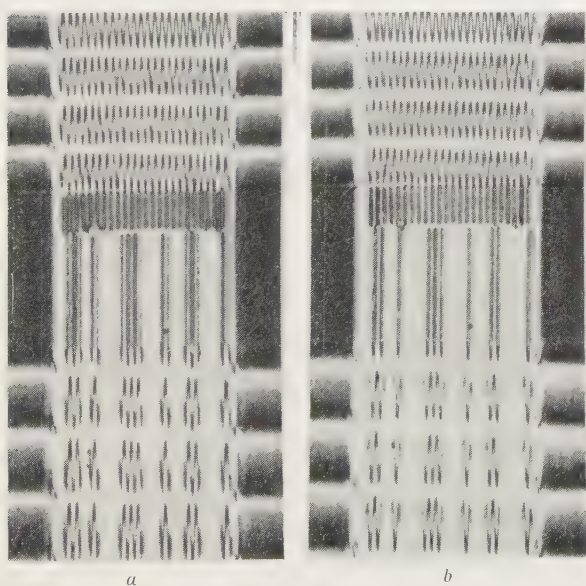


BILD 13. — Reflexionsgitter mit Einzel- und Mehrfachstrichen, Phasenänderung im primären Bild.

- a) $\Delta\psi = +90^\circ$
 b) $\Delta\psi = -90^\circ$ } $D = 1$.

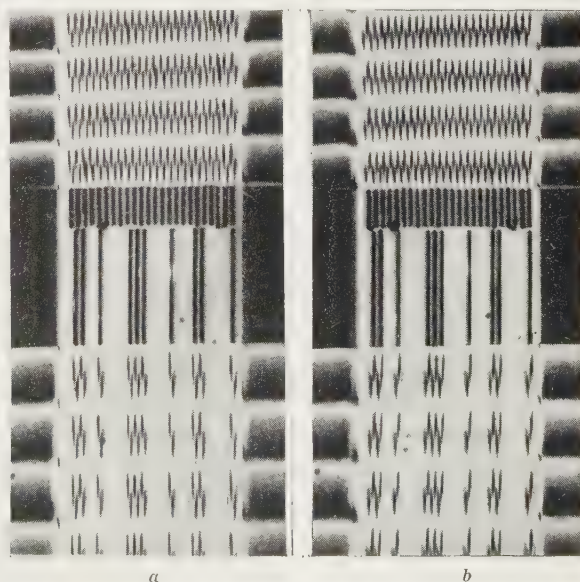


BILD 14. — Reflexionsgitter mit Einzel- und Mehrfachstrichen, nur einseitiges Beugungslicht.

- a) Beugungslicht links bis zur dritten Ordnung,
 b) Beugungslicht rechts bis zur dritten Ordnung.

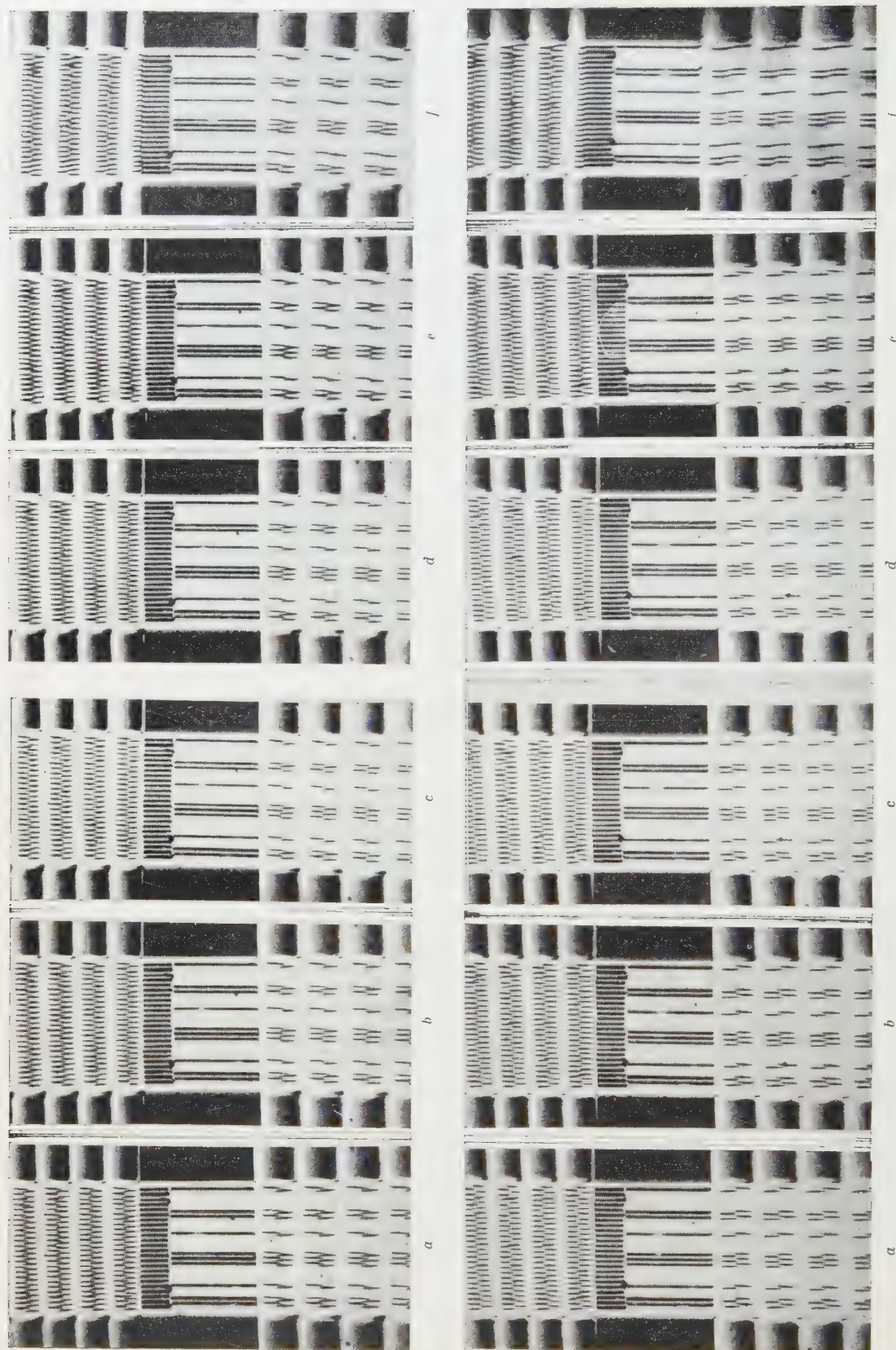


Bild 15. — Reflexionsgitter mit Einzel- und Mehrfachstrichen, bei einseitig abgeblendetem Beugungslicht.

- a) Beugungslicht bis zur sechsten Ordnung.
- b) Beugungslicht bis zur fünften Ordnung.
- c) Beugungslicht bis zur vierten Ordnung.
- d) Beugungslicht bis zur dritten Ordnung.
- e) Beugungslicht bis zur zweiten Ordnung.
- f) Beugungslicht bis zur ersten Ordnung.

strich die gleiche, auch wenn sich bei deren interferenzieller Überlagerung im primären Bild verschiedene Lichtverteilungen ergeben.

Um rein experimentell noch weitere Einblicke in die Wirkungsweise des Phasenkontrastverfahrens zu gewinnen, wurden nun noch andere Eingriffe in das primäre Bild vorgenommen. Dieses primäre Bild zeigt (vergl. Bild 3) bei Strichen und Gittern stets eine symmetrische Lichtverteilung: Die Beugungsspektren der verschiedenen Ordnungen sind stets paarig vorhanden und es ist zunächst die Frage berechtigt, was

flussten Null-Licht zusammen, so ergibt sich wieder das fast strukturlose Bild des Phasengitters, wie in Bild 4 mit der Doppelstruktur für $\Delta\varphi = 180^\circ$. Seine Ursache ist also eine Phasendifferenz zwischen Null-Licht und Beugungslicht von $+90^\circ$ resp. -90° .

Wenn man bei Verwendung nur einseitigen Beugungslichtes dem Null-Licht eine Phasenänderung erteilt, so verlagern sich die beiden sekundären Teilbilder um kleine, dem $\Delta\psi$ entsprechende Beträge seitlich, und zwar wandern bei gleicher Phasenänderung des Null-Lichtes die zusammen mit dem rechten bzw.

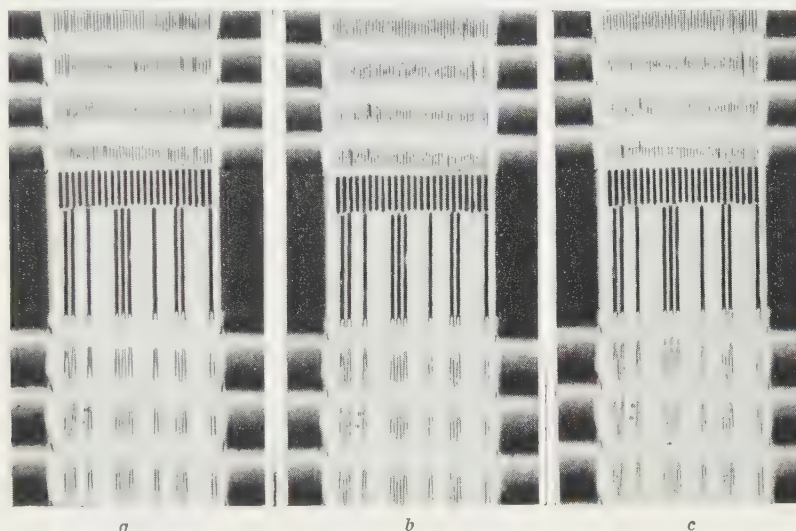


BILD 16. — Reflexionsgitter mit Einzel- und Mehrfachstrichen, ohne Eingriff im primären Bild.

- a) Beugungslicht bis zur ersten Ordnung.
- b) Beugungslicht bis zur zweiten Ordnung.
- c) Beugungslicht bis zur dritten Ordnung.

geschieht im sekundären Bild, wenn im primären Bild das Beugungslicht einseitig abgeblendet wird. Das ist in Bild 14 dargestellt.

Das Amplitudengitter ist in gleicher Weise sichtbar, wie bei der Wirkung des beidseitigen Beugungslichtes. Es zeigt die richtige Gitterkonstante, nur ist der Kontrast durch das zu starke, ungeschwächte Null-Licht etwas herabgesetzt.

Das Phasengitter dagegen erscheint fast wie im Bild 13. Einmal jedoch ist es — Bild 14a — gegenüber dem Amplitudengitter seitlich um $+d/4$ entsprechend einem $\Delta\psi = +90^\circ$ nach rechts verschoben, zum anderen jedoch scheint für kleine $\Delta\varphi$ eine einseitige Zuspitzung der Gitterstriche zu bestehen.

Wird nunmehr — Bild 14b — die andere Seite des Beugungslichtes allein abgeblendet, so ist das Phasengitter um $-d/4$ entsprechend einem $\Delta\psi$ von -90° , d. h. nach der anderen Seite, also nach links verschoben.

Insgesamt ergibt sich, dass beim Phasengitter zwei Teilbilder entstehen und diese beiden Teilbilder der Phasenstruktur genau auf Lücke liegen. Wirkt das rechte und linke Beugungslicht mit dem unbeein-

linken Beugungslicht entworfenen sekundären Teilbilder gegenläufig, d. h. entweder aufeinander zu oder voneinander fort. Sollen diese Teilbilder sich für ein bestimmtes $\Delta\varphi$ überdecken, so ist also nur die diesem Wert zukommende Seitenversetzung durch eine entsprechende Phasenänderung $\Delta\psi$ hervorzurufen.

Ändert man die Phase des Null-Lichtes um 90° , so ergibt sich eine entgegengesetzte Lageänderung der beiden Teilbilder um $d/4$, so dass diese nun zur Deckung kommen. Hierdurch ergibt sich das bereits bekannte Phasenkontrastbild mit $\Delta\psi = \pm 90^\circ$, bei dem ausserdem das Amplitudengitter — bei dem nunmehr zwei um $\pm d/4$ verschobene Teilbilder zusammenwirken — als Gitter doppelter Feinheit erscheint.

Die Doppelstriche des Phasengitters für $\Delta\psi = 0^\circ$ (Bild 18 a) sind also von ganz besonderer Art: Es sind keine durchgehenden Striche, sondern die obere Hälfte des linken Striches gehört zur unteren Hälfte des rechten Striches und umgekehrt. Führt man $\Delta\psi = +90^\circ$ ein, so ergibt sich durch Zusammenlaufen der Knickstriche oberhalb von $\Delta\varphi = 180^\circ$ ein schwarzer Strich in heller Umgebung und unterhalb von $\Delta\varphi = 180^\circ$ ein heller Strich mit dunklen Rändern.

Macht man $\Delta\psi = -90^\circ$, so ergibt sich das umgekehrte. Je nach dem Vorzeichen von $\Delta\varphi$ und $\Delta\psi$ bekommt man eine Darstellung der Phasenstriche im positiven oder negativen Phasenkontrast: Es genügt ein $\Delta\psi$, nämlich $\pm 90^\circ$, um die Phasenstriche über ihre ganze Länge — oder doch deren grössten Teil, da zunächst noch ohne Absorption in der Phasenlamelle gearbeitet wird — als Amplitudenstriche sichtbar zu machen. Man kann den Verlauf dieser Knickstriche als eine graphische Darstellung der bei verschiedenem

mehr und mehr abgeblendet: Die Aufnahmen in Bild 15 zeigen das Phasenobjekt nacheinander bei einseitigem Beugungslicht der Ordnung O - VI bis O - I, sowie O - I' bis O - VI'. Während bei O - VI der Versatz der Teilstriche recht deutlich ist, erscheint er bei O - V usw. bereits weniger ausgeprägt und bei O - I entstehen statt der Knickstriche einfache schräge Striche. Das ist sowohl für die Einzelstriche, wie für die Gitterstriche in genau der gleichen Weise der Fall.

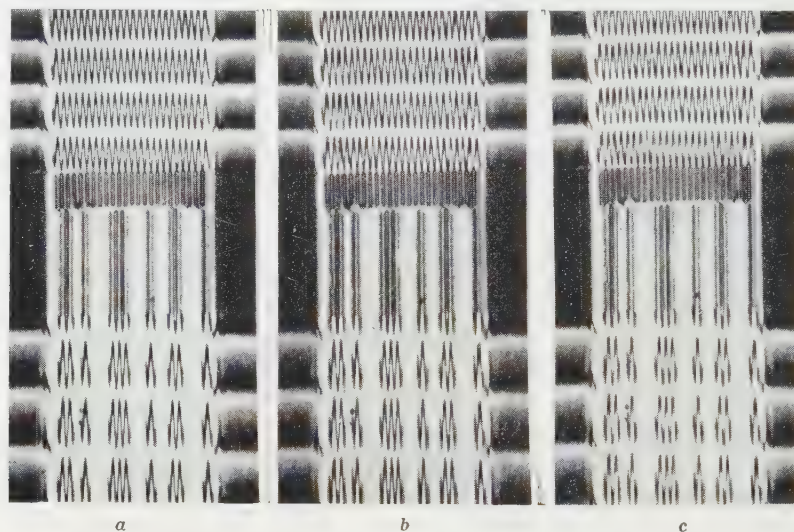


BILD 17. — Reflexionsgitter mit Einzel- und Mehrfachstrichen, Phasenänderung im primären Bild $\Delta\psi = +90^\circ$.

- a) Beugungslicht bis zur ersten Ordnung.
- b) Beugungslicht bis zur zweiten Ordnung.
- c) Beugungslicht bis zur dritten Ordnung.

$\Delta\varphi$ erforderlichen Phasenänderungen für das nullte Beugungsmaximum im primären Bild ansehen. Wäre das $\Delta\psi = 90^\circ \pm \Delta\varphi/2$, so müssten statt der Knickstriche « schräge Striche » auftreten; für $\Delta\psi = \text{const.}$ dagegen, kann der Verlauf der Phasenstriche nicht anders als in Form von versetzten Strichteilen erwartet werden.

Diese Versuche unterstreichen das Ergebnis, dass es im vorliegenden Versuchsaufbau zur Darstellung des Phasengitters als Amplitudengitter und umgekehrt nur der Einführung eines $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ im primären Bild bedarf.

Die Ergebnisse der bisherigen Versuche zeigen wohl deutlich die Berechtigung der Massnahme $\Delta\psi = \pm 90^\circ$. Sie lassen kaum eine Möglichkeit für die Auffassung $\Delta\psi = f(\Delta\varphi)$ und es ist die Frage berechtigt, ob es nicht noch eine variable Einflussgrösse gibt, die experimentell noch nicht genügend berücksichtigt ist. Diese Grösse ist die Apertur des Abbildungsstrahlengangs, d. h. die Zahl der gleichzeitig wirksamen Beugungsbilder. Diese war — ohne es besonders auszusprechen — bisher stets so gross bemessen worden, als es den Linsendurchmessern nach möglich war.

In den folgenden Versuchen wird das Beugungslicht

Dass diese Striche breiter sind als bei mehreren Maxima, dürfte nach der Theorie der mikroskopischen Abbildung nicht überraschen.

Bild 16-18 zeigen das Phasenobjekt mit Beugungslicht bis zu verschiedenen Ordnungen; und zwar Bild 16 ohne Eingriff in das primäre Bild, und Bild 17 und 18 bei einer Phasenänderung von $\Delta\psi = +90^\circ$ resp. $\Delta\psi = -90^\circ$. Bei der Mitwirkung mehrerer Ordnungen sind die Phasenstriche fast unabhängig von $\Delta\varphi$ optimal wiedergegeben, während bei der Wirkung des Beugungslichtes erster Ordnung allein nur der Bereich $\Delta\varphi \sim 90^\circ$ mit $\Delta\psi = \pm 90^\circ$ wiedergegeben ist.

Die praktische Folgerung dieser letzten Versuche lautet also:

Für kleine Objekte, von deren Beugungslicht das abbildende Objektiv nur das Beugungslicht erster Ordnung aufnimmt, bedarf es einer Phasenlamelle $\Delta\psi = f(\Delta\varphi)$; für grössere Objekte, von deren Beugungslicht das Objektiv auch die höheren Ordnungen aufnimmt, genügt — unabhängig von $\Delta\varphi$ — ein $\Delta\psi = \text{const.} = \pm 90^\circ$.

Für das Ergebnis der Experimente zu der aufgeworfenen Frage ist es — entgegen anderen Auffassungen — gleichgültig, ob mit Gittern oder Einzelstrichen

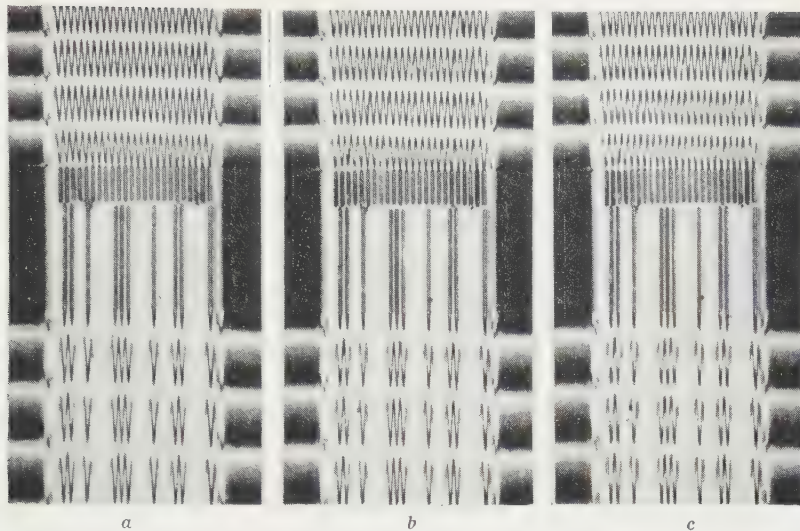


BILD 18. — Reflexionsgitter mit Einzel- und Mehrfachstrichen, Phasenänderung im primären Bild $\Delta\psi = -90^\circ$.

- a) Beugungslicht bis zur ersten Ordnung.
- b) Beugungslicht bis zur zweiten Ordnung.
- c) Beugungslicht bis zur dritten Ordnung.

gearbeitet wurde. Wichtig ist allein, wieviel seitliches Beugungslicht wirksam wird. Hier war es beim ersten Teil der Versuche gerade so, dass nicht der Mangel, sondern das Übermass an Beugungslicht resp. seine Verschiedenphasigkeit die experimentelle Erkenntnis verzögerte, dass innerhalb bestimmter Grenzen auch der Auffassung $\Delta\psi = f(\Delta\varphi)$ durchaus eine Berechtigung zukommt: Nämlich im Falle der Gleichphasigkeit des insgesamt wirkenden Beugungslichtes, was nur bei der Mitwirkung einer einzelnen Ordnung, insbesondere der ersten der Fall ist. Der praktisch wichtigere Fall ist jedoch wohl der, dass die sichtbar zu

machenden Phaselemente das Auflösungsvermögen der Objektive nicht voll in Anspruch nehmen, also mehrere Ordnungen des Beugungslichtes zugleich wirken.

Berücksichtigt man ausserdem, dass das Phasenkontrastverfahren hinsichtlich der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ nicht sehr empfindlich ist, da es ja genügt die Phasenobjekte mit gutem, statt optimalen Kontrast zu erkennen, so findet auch die Tatsache ihre Erklärung, dass es in der mikroskopischen Technik im allgemeinen ausreicht, sich einer Phasenlamelle der gleichen Art $\Delta\psi = \text{const.} = \pi/2$ zu bedienen.

Manuscrit reçu le 6 août 1954.

Quantum theories of the absolute threshold : the influence of retinal position and area

by M. H. PIRENNE & F. H. C. MARRIOTT

from the Departments of Physiology and of Statistics, University of Aberdeen

SUMMARY. — VAN DER VELDEN and BOUMAN studied the area-intensity relationship in an attempt to prove their « two-quantum theory » of the visual absolute threshold. The present experiments demonstrate the non-uniformity of the larger retinal areas used by these authors. The variation of sensitivity with retinal position is so large in these areas that it invalidates the attempted proof of the two-quantum theory, while suggesting that the retinal threshold n is equal to at least 3 quanta.

SOMMAIRE. — VAN DER VELDEN et BOUMAN ont étudié la relation entre l'aire et l'intensité dans le but de vérifier leur « théorie des deux quanta » pour le seuil absolu de la vision. Les expériences ci-dessous montrent que les grandes surfaces rétiniennes utilisées par ces auteurs ne sont pas du tout uniformes. La variation de sensibilité avec la position sur la rétine est tellement grande dans ces régions, qu'elle infirme la tentative de preuve de la théorie des deux quanta. Les expériences indiquent que le seuil rétinien n est probablement égal au moins à trois quanta.

ZUSAMMENFASSUNG. — Beim Nachweis ihrer Behauptung, dass zwei Quanten die absolute Sehschwelle darstellen, haben VAN DER VELDEN und BOUMAN die Beziehung zwischen Feld und Intensität untersucht. Die vorliegenden Versuche zeigen die Ungleichförmigkeit so grosser Netzhautpartien, wie die genannten Autoren sie verwendet haben. Die Änderung der Empfindlichkeit mit der Lage auf der Netzhaut ist in diesen Teilen so stark, dass damit der angestrebte Beweis für die Gültigkeit jener Behauptung misslungen sein dürfte. Man darf wohl sagen, dass die Netzhautempfindlichkeit n bei mindestens drei Quanten liegt.

The "two-quantum theory" of the visual absolute threshold put forward by VAN DER VELDEN and BOUMAN [1, 2] rests, in the case of rod vision, on the following assumptions: (a) the retinal areas involved in the experiments can be considered as made up of juxtaposed functional units, the diameter of each of which subtends about 10 minutes of arc in visual angle, and (b) for all these functional units the retinal threshold $n = 2$ quanta, n being defined as the smallest number of light quanta which must be absorbed by the rods of the retina in order to make a human subject see a test field under the best conditions. The theory also assumes that all the functional units have the same sensitivity in terms of the light energy incident on the cornea and that the subject reports a test field "seen" when at least one of the units has absorbed a minimum of 2 quanta. On this basis the "two-quantum theory" predicts on simple grounds of probability that the threshold luminance of a test field will be inversely proportional to the square root of the field area if the latter is large compared with that of the $10'$ functional units.

BOUMAN and VAN DER VELDEN [2] have reported experimental results in agreement with this prediction. Using circular test fields the centre of which was placed 7° from a fixation point, they found the inverse square root relationship to hold for fields from about 0.5° to 23.2° in diameter when the test field was illuminated by flashes of a few milliseconds duration.

Now if the retinal regions studied are not uniform in their properties, if for instance some of the functional units have a greater area of summation than the others, or if their constituent rods are able to absorb a greater proportion of the light incident upon them, the above theoretical relationship will be upset even if n is in fact equal to 2. For it is clear that the presence of even a few retinal units of much greater sensitivity than the others will considerably influence the experimental results—in the same way as statistical experiments made with a number of dice would be affected if a few of the dice used were loaded. Yet direct tests of the uniformity of the retinal areas used do not seem to have been made by VAN DER VELDEN and BOUMAN in the present connection. BOUMAN [3] quotes SHEARD [4] in support of the statement that the sensitivity of the retina is "relatively constant" around a point 7° from fixation. Reference to Figure 22 of SHEARD's paper [4] however reveals threshold variations of the order of $0.5 \log_{10}$ unit from 2° to 12° for a 2° field. Other workers found large changes of threshold with retinal position. On account of the fundamental importance of this point for the theory, we made experiments to test directly the uniformity or non-uniformity of the retinal regions used by VAN DER VELDEN and BOUMAN under conditions similar to those used by these authors.

Experiments. — In all experiments the test field was illuminated with green light (Ilford colour filter No. 604) in flashes of 0.0026 second duration given

by a pendulum shutter. The field was viewed by the subject's left eye through an artificial pupil 2 mm in diameter, the position of the subject's head being fixed by the use of a dental impression. The subjects were dark-adapted for at least half an hour before measurements were started. Measurements to be compared accurately with one another were always made on one subject at one single sitting.

The threshold values L given below are expressed as the logarithms, to base 10, of the corresponding (mean) number of quanta of $\lambda = 0.51 \mu$ passing through the artificial pupil per square degree of the test field and per 0.0026 second flash. Each threshold value was estimated by presenting to the subject, in random order, one flash at each of a number of intensities $0.1 \log_{10}$ unit apart. The experiments always included some intensities at which the test field was never seen and some at which it was always seen. In some experiments two such series of flashes were given. The threshold L was then defined as the \log_{10} intensity value above which there were as many responses "not seen" as there were "seen" below it [5]. (This corresponds to a frequency of seeing of approximately 50 per cent). This method of estimating the threshold, which in a more general form is due to STILES and CRAWFORD [14] and to H. K. HARTLINE and R. McDONALD (Private communication), here gives results having a standard error of about $0.10 \log_{10}$ unit when 1 flash is presented at every $0.1 \log_{10}$ unit intensity step. This is the accuracy when the frequency-of-seeing curve can be represented (purely as a formal device) by a Poisson probability integral calculated for $n = 6$, which corresponds approximately to the case of the smaller fields used in the present experiments. For the larger fields the frequency-of-seeing curve tends to be steeper and the accuracy higher, so that $0.10 \log_{10}$ unit here may safely be chosen as an upper limit for the standard error under the above conditions.

The relative values of the energy scale of the apparatus had an accuracy of about $0.01 \log_{10}$ unit but the absolute energy values given below are approximate only and may suffer from a systematic error of the order of 0.1 or $0.2 \log_{10}$ unit. It is the relative values which are of interest in the present experiments. The following results were not intended to give accurate redeterminations of absolute threshold energies; nevertheless in the case of small test fields (Table 1, $1/4^\circ$ field) they are in satisfactory agreement with previous determinations [6].

Experiment (A). — The absolute threshold was measured separately for the two halves (a) and (b) of a circular field 11.3° in diameter, the centre of which was placed in the nasal visual field 7° from the fixation point *FP* (Fig. 1).

The threshold for half field (a) was

$$L(a) = 1.37 \pm 0.07 \text{ (S. E.)}$$

The standard error (S. E.) here is $(0.10)/(\sqrt{2}) = 0.07$

because the value of $L(a)$ is based on two sets of readings made as explained above. Similarly for the more peripheral half field (b) the threshold was

$$L(b) = 1.16 \pm 0.07 \text{ (S. E.)}$$

The difference

$$L(a) - L(b) = 0.21 \pm 0.10 \text{ (S. E.)}$$

is just statistically significant (significance level $P < 0.05$). Thus this relatively small test field, which lies outside the area of the fovea centralis, is non-uniform in its sensitivity. Its more peripheral half is more sensitive than its less peripheral half. According to the inverse square root relationship the difference between the threshold for the whole circular field ($a + b$) and that for one of its constituent halves (a) or (b) alone would be $\log_{10}(\sqrt{2}) = 0.15$, which is smaller than the observed difference between (a) and (b). The non-uniformity of the retina therefore does not seem negligible with regard to the theory to be tested.

Experiment (B). — The circular field was 22.6° in diameter, that is slightly smaller than the largest field (23.2°) used by BOUMAN and VAN DER VELDEN [2]. Its centre was 7° nasally from the fixation point FP (Fig. 1). Thus the image of the field here covered the fovea and neighbouring regions. The threshold was measured for the whole field ($c + d + f$) and for the two segments on the left (c) and right (f) of the circle each of $1/9$ the area of the whole circle.

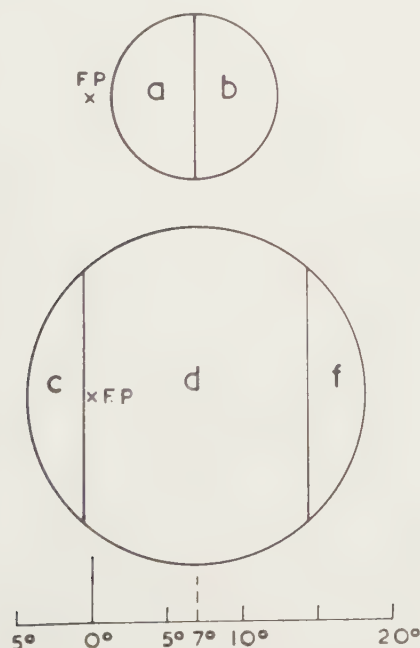


FIG. 1. — Diagram of the arrangements for Experiments (A) and (B). The subject's left eye was used. The scale gives the angles on the horizontal meridian measured in degrees from the fixation point.

The threshold values were

$$L(c) = 1.78 \pm 0.07 \text{ (S. E.)}$$

$$L(c + d + f) = 1.32 \pm 0.07 \text{ (S. E.)}$$

$$L(f) = 1.42 \pm 0.07 \text{ (S. E.)}$$

Each value is based on two sets of readings and the accuracy is the same as in Experiment (A).

The difference between $L(c)$ and $L(c + d + f)$ is 0.46, in excellent agreement with the value of $0.48 = \log_{10}(\sqrt{9})$ predicted by the theory of VAN DER VELDEN and BOUMAN. However there is a highly significant difference, 0.36 ± 0.10 (S. E.) ($P < 0.001$), between the means for (c) and (f). There is also a highly significant difference ($P < 0.001$) between the actual difference between ($c + d + f$) and (f), 0.10 ± 0.10 (S. E.), and its predicted value, 0.48. The present 22.6° area is markedly non-uniform in its sensitivity.

These results, and those of the following Experiment (C), are in keeping with the conclusion expressed by HECHT, HAIG and WALD [7] as a result of experiments of a related kind: "Evidently the behaviour in dark adaptation [including the final absolute threshold] of centrally located fields of different sizes [up to 20° in diameter] is determined in the main not by area as area, but by the fact that the retina gradually changes in sensitivity from centre to periphery, and therefore the larger the field the farther it reaches into peripheral regions of permanently greater sensitivity."

Experiment (C). — The threshold for fields $1/4^\circ$, 1° , 2° and 4° in diameter was measured on a horizontal meridian at various positions nasal to the fixation point. Table 1 and Figure 2 give the results for the

TABLE 1

Values of L for circular fields of different sizes located at different angular distances from the fixation point on the nasal side (subject's left eye).

Diameter of circle	$1/4^\circ$	1°	2°	4°	2°	4°
Subject	F.H.C.M.	F.H.C.M.	F.H.C.M.	M.H.P.	M.H.P.	M.H.P.
Distance from fixation point						
0°	—	5.02	—	—	—	—
2°	4.12	3.32	2.90	3.20	2.80	2.37
5°	3.50	2.68	2.13	2.68	2.38	1.90
10°	3.29	2.37	2.02	2.28	1.97	1.48
15°	3.40	2.37	1.81	2.16	1.76	1.48
20°	3.29	2.37	1.86	2.26	1.97	1.38
25°	—	—	—	—	—	1.69
30°	—	—	—	—	—	1.48

The standard error of each value is ± 0.10 or rather less.

The mean threshold number of quanta (0.51μ) in each case can be easily calculated from the table. For example, for $1/4^\circ$ field 20° from the fixation point, $L = 3.29$. The area of the field is $\pi/64$ square degrees, so the number of quanta required is $(\pi/64)$ antilog 3.29 or 96 quanta. This value gives the energy at the cornea of the eye, the light quantum (3.89×10^{-12} erg) being used as a convenient unit of radiant energy.

left eyes of two subjects. It is apparent that in both subjects there are marked changes in the threshold, for all the field sizes used, up to 10° from the fovea.

From 10° to 20° (to 30° for the 4° field) there appears to be much less variation in sensitivity; however the experiments are not of great accuracy and cannot detect changes of less than about $0.3 \log_{10}$ unit. These findings are in general agreement with those reported

the frequency-of-seeing curves, or if such changes occur they are not related in a simple theoretical way to the change of threshold [5, 6]).

The dashed vertical lines in Figure 2 indicate the position of the centre and limits of the largest field, 23.2° in diameter, used by BOUMAN and VAN DER VELDEN [2]. These workers assume that the retinal sensitivity is relatively constant inside this field except for the fovea itself. Yet the results obtained for subject M. H. P. with the 4° field, for instance, show a variation of sensitivity of $1 \log_{10}$ unit within the corresponding limits.

For small test fields ($4.3'$; $13'$; $10.6'$) various workers have found that the threshold rises again at larger angles from the fixation point after having reached a minimum in the neighbourhood of 10° , the exact position of which varies with the subject [8]. It is possible that the results obtained here with 4° fields for angles greater than 10° or 15° are due to the fact that spatial summation increases with distance from the fovea and thus compensates for a decrease in intrinsic retinal sensitivity. In any case it is unlikely that the retina becomes really uniform beyond 10 or 15° .

Discussion. — The sensitivity contours of Figure 2 show that when experiments are made using concentric fields of increasing diameter, the centre of the fields being 7° from the fovea, some of the retinal regions covered by the larger fields will be more sensitive, some will be less sensitive, than the region covered by the smaller fields. This makes it very difficult to test quantitative theories of the dependence of the threshold upon the area of the test field. When the test field becomes so large that it extends beyond the fovea, as in the case of the largest test field used by BOUMAN and VAN DER VELDEN [2], the relationship between threshold and area must become even more complicated. The results of experiments (A) and (B) agree with these conclusions.

The reasoning of VAN DER VELDEN and BOUMAN rests upon the assumption of a relatively uniform retina. Now as we have just seen the variations of retinal sensitivity in the retinal region studied by these workers are in fact very large. The inverse square root relationship which they observed between threshold luminance and field area therefore cannot be taken as proving that $n = 2$. Their results may to a large extent be due to the fact that their bigger fields reached more sensitive regions of the retina than their smaller fields. If it were certain that this was the deciding factor in the experiments of VAN DER VELDEN and BOUMAN, it could be concluded that the "true" relationship which should correspond to an ideal uniform retina should yield a less rapid change of threshold luminance with area than the inverse square root relationship. According to VAN DER VELDEN and BOUMAN's own theory this in turn would then prove that n is greater than 2 quanta, that is, at least 3 quanta.

Thus the experiments of VAN DER VELDEN and BOUMAN on area and threshold fail to prove that

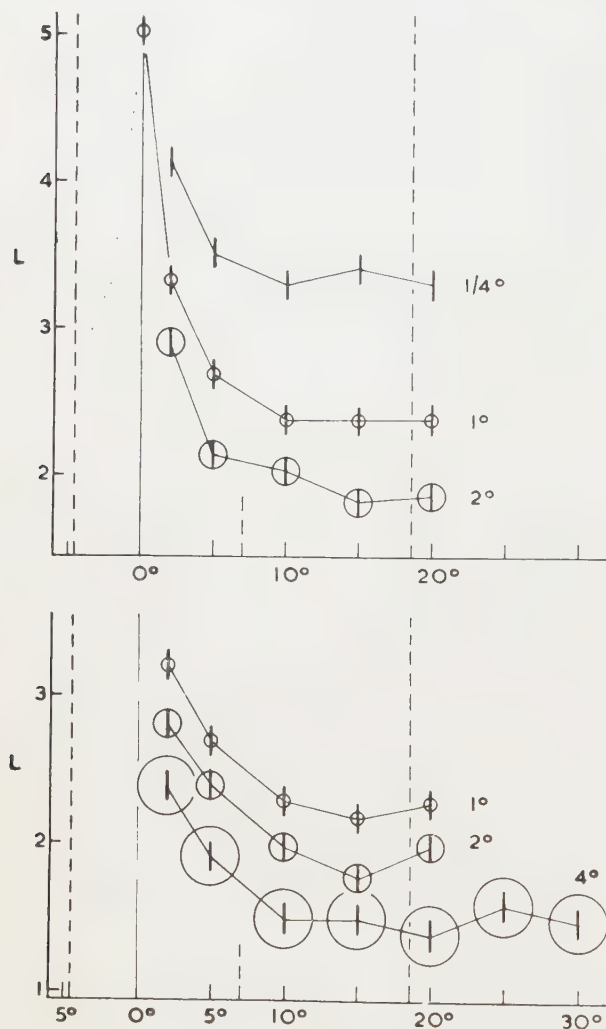


FIG. 2. — Variation of the absolute threshold with retinal position along the horizontal meridian, Experiment (C). The upper graph refers to subject F. H. C. M., the lower to subject M. H. P. The ordinates give the values of L , the logarithm of the field luminance as defined in the text (Table 1). The vertical black line attached to each experimental point indicates the standard error of the measurement. The abscissa gives the angles from the fixation point. The size of the 1° , 2° and 4° fields is indicated by empty circles on the graphs.

by HECHT, HAIG and WALD [7] for a 2° field up to 15° perimetric angle. The experiments with different sizes of field were made on different days. Therefore they are not accurately comparable on account of day-to-day variations of the threshold (measured at the cornea), which may amount to $0.3 \log_{10}$ unit in one and the same subject. (Such day-to-day variations are not generally accompanied by changes in the shape of

$n = 2$. While some of the experiments made by the same workers on the relationship between time of exposure and threshold gave results in formal agreement with the "2-quantum theory", the experiments they made using both large areas and long exposures disagreed with it [2]; VAN DER VELDEN and BOUMAN explain the large discrepancies observed in the latter cases by the additional assumption of certain effects of spatial interaction in the retina. Again, the shape of the frequency-of-seeing curves obtained by various workers using small test fields seems incompatible with the assumption $n = 2$ [9]. The results of further experiments of a more complicated kind are given by BOUMAN *et al.* [10] in support of the "2-quantum theory"; nevertheless it would appear that this theory is far from being safely established.

It seems likely that the organisation of the retina into functional units, even within restricted and fairly uniform retinal regions, is much more complex [11, 12, 13] than that assumed by the theory of VAN DER VELDEN and BOUMAN. At the present stage it would seem that the more urgent task in these investigations is to try to understand in greater detail how the various components of the retina do in fact work. Such an understanding may then eventually lead to safer methods of estimating the value, or values, of the retinal threshold n .

We are greatly indebted to the NUFFIELD FOUNDATION for their support in the form of an apparatus grant.

Note added in proof. In a recent paper [Proc. phys. Soc. Lond. B, **67** (1954), 673-676] G. S. BRINDLEY

concludes from a different line of argument that n is equal to at least 4 quanta.

REFERENCES

- [1] H. A. VAN DER VELDEN, *Physica*, **11** (1944), 179-189; *Ophthalmologica*, **111** (1946), 321-331.
- [2] M. A. BOUMAN and H. A. VAN DER VELDEN, *J. opt. Soc. Amer.*, **37**, (1947), 908-919.
- [3] M. A. BOUMAN, *J. opt. Soc. Amer.*, **42** (1952), 941-950, see p. 948.
- [4] C. SHEARD, *J. opt. Soc. Amer.*, **24** (1944), 464-508.
- [5] E. J. DENTON and M. H. PIRENNE, *J. Physiol.*, **123** (1954), 417-442.
- [6] S. HECHT, S. SHLAER and M. H. PIRENNE, *J. gen. Physiol.*, **25** (1942), 819-840.
- [7] S. HECHT, C. HAIG and G. WALD, *J. gen. Physiol.*, **19** (1935), 321-337.
- [8] W. S. STILES and B. H. CRAWFORD, *Proc. Roy. Soc. B*, **122** (1937), 255-280 (Cf. J. Ten Doesschate, *Ophthalmologica*, **117** (1949), 110-115).
J. CABELLO and W. S. STILES, *Ann. R. Soc. Española de Física y Química A*, **46** (1950), 251-282.
SYBIL G. DE GROOT, JANE M. DODGE, and JO ANN SMITH, Factors in night vision sensitivity: the effect of brightness. *Medical Research Laboratory, U. S. Naval Submarine Base, New London*, vol. XI, No. 11, Report No. 194 (1952).
- [9] M. H. PIRENNE and E. J. DENTON, *J. opt. Soc. Amer.*, **41** (1951), 426-427.
E. J. DENTON and M. H. PIRENNE, *J. Physiol.*, **115** (1951), 68 P.
- [10] M. A. BOUMAN and E. W. M. BLOKHUIS, *J. opt. Soc. Amer.*, **42** (1952), 525-528.
M. A. BOUMAN, *J. opt. Soc. Amer.*, **43** (1953), 209-211.
M. A. BOUMAN and G. VAN DER BRINK, *J. opt. Soc. Amer.*, **43** (1953), 895-898.
- [11] H. K. HARTLINE, *Amer. J. Physiol.*, **130** (1940), 690-699.
- [12] M. H. PIRENNE and E. J. DENTON, *Nature, Lond.*, **170** (1952), 1039-1042.
M. H. PIRENNE, *Brit. Med. Bull.*, **9** (1953), 61-67.
- [13] S. W. KUFFLER, *J. Neurophysiol.*, **16** (1953), 37-68.
- [14] W. S. STILES and B. H. CRAWFORD, *Proc. Roy. Soc. B*, **116** (1934), 55-102.

Manuscript reçu le 10 mai 1954.

Lettre à l'éditeur

Comment on Aguilar and Stiles' discussion of their increment threshold measurements [1]

M. A. BOUMAN

Research Unit for Perception of the N. D. R. C., Soesterberg The Netherlands.

This discussion taking the fluctuations theory as starting point referred to the form of the curve relating the increment threshold ΔB with the field intensity B . Their measurements for a circular test stimulus 9° in diameter, exposure time 0.2 second demonstrated great deviations from \sqrt{B} relation.

Various possible mechanisms were put forward which — when such relation is required by fluctuations theory — can account for the deviations.

In agreement with other authors — among which is DE VRIES [2] — they concluded that variation in the content of rhodopsin in the receptors is small and much too small to explain the deviations with progressive exhaustion of rhodopsin. As alternatives for the b-section in the curve, variation of the size of a

summation unit with variation of field intensity and a limitation imposed by a refractory period were mentioned.

Recent direct measurements [3] of the summation unit point to the conclusion that such variation is also unimportant to account for the deviations from \sqrt{B} . The possibility of variation in summation time had to be also mentioned. In the recent paper [3] the non-importance of this variation for the problem is apparent.

Perhaps our main point in this comment might contribute to the clarification of the problem. This is namely that ROSE's simple expectance from fluctuations theory for proportionality of ΔB with \sqrt{B} is incomplete for their stimulus conditions even when

variation of rhodopsin content, variations in integrative actions in the retina and a limitative action due to a refractory period as suggested by VAN DER VELDEN [4] do not occur.

This expectance is based on the incorrect imagination that for flashes of arbitrary area A and exposure time t the total amount of energy $\Delta B.A.t$ required by theory for the increment threshold is approximately proportional to the standard deviation in the fluctuations in the absorption in the area θ and time interval T over which the retinal mechanisms can sum.

The theory is represented by the assumption that the increment threshold is reached when in such area θ and time T (contained in A and t) the variations in the number of absorptions of quanta are sufficiently exceeded by application of the teststimulus; this excess is approximately proportional to the standard deviation from the mean in this number.

When by this assumption under the actual conditions in such area θ and time T the excess of p absorptions by the teststimulus is needed

$\Delta B.A.t \propto p$ when both A and t are smaller than θ and T . Otherwise approximately

$$\Delta B.A.t \propto p.(at)^{p-1/p} \quad \text{when } t = aT, a \gg 1 \text{ and}$$

$$\Delta B.A.t \propto p.(b\theta)^{p-1/p} \quad \text{when } A = b\theta, b \gg 1 \text{ for circular flashes [5].}$$

Consequently when theory is sound and no complicating mechanisms as mentioned before are active only for small and short flashes ΔB will vary with the fluctuations theory line in figure 6 of AGUILAR and STILLES' paper. These considerations were explicitly put forward in previous and recent papers [5].

They are simple straightforward deductions from the original investigation of VAN DER VELDEN [6].

When it is taken for granted that p will never be smaller than 2 [7] and the 9° circular testarea covers about 20 times the diameter of a summation area θ , the flashtime 0,2 second is about 3 times T [3], according to the formulae the variation in ΔB for these flashes will exceed almost 30 to 50 times this variation for flashes with $A < \theta$ and $t < T$ when B is varied from very low values to values for which the rod mechanism is saturated [5]. This factor combined with the small influences due to variation in θ and T and in the rhodopsin content can abridge the deviations in their data from the \sqrt{B} relation.

Hence an adequate check or fruitful speculation on the soundness of fluctuation theory needs a lot of experimental evidence. At least measurements for a collection of A and values t have to be included.

REFERENCES

- [1] M. AGUILAR and W. S. STILES, *Opt. Act.*, **1**, 1954, p. 59.
- [2] H. DE VRIES, *Physica*, **14**, 1948, p. 347.
- [3] M. A. BOUMAN and G. VAN DEN BRINK, *J. opt. Soc. Am.*, **42**, 1952, p. 617.
G. VAN DEN BRINK and M. A. BOUMAN, *J. opt. Soc. Am.*, **43**, 1953, p. 814; *J. opt. Soc. Am.*, 1954 (in press).
- [4] H. A. VAN DER VELDEN, *Ned. Tijdschrift v. Natuurk.*, **15**, 1949, p. 146.
- [5] M. A. BOUMAN and H. A. VAN DER VELDEN, *J. opt. Soc. Am.*, **37**, 1947, p. 908; *J. opt. Soc. Am.*, **38**, 1948, p. 570.
M. A. BOUMAN, *Doc. Ophthalmologica*, **4**, 1950, p. 23.
M. A. BOUMAN, *J. opt. Soc. Am.*, **40**, 1950, p. 825; *J. opt. Soc. Am.*, **42**, 1952, p. 820; *J. opt. Soc. Am.*, **42**, 1952, p. 941.
- [6] H. A. VAN DER VELDEN, *Physica*, **11**, 1944, p. 179; *Ophthalmologica*, **111**, 1946, p. 321.
- [7] M. A. BOUMAN, *J. opt. Soc. Am.* (in press).

Manuscrit reçu le 13 décembre 1954.

BIBLIOGRAPHIE

Optical Image Evaluation. Proceedings of the NBS Semi-centennial Symposium on Optical Image Evaluation Held at the NBS on October 18, 19 and 20 1951. Edition..... (195).

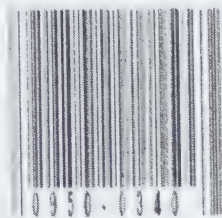
Cet ouvrage contient un ensemble d'articles communiqués à l'occasion d'un Colloque au National Bureau of Standards (Washington). L'abondance des articles dont beaucoup sont suivis de discussions, laisse penser que cet ouvrage rassemble une excellente documentation sur l'évolution des idées concernant la qualité des images optiques. Nous reproduisons ci-dessous la liste des articles :

1. The diffraction theory of aberrations, by F. ZERNIKE.
2. The contrast of optical images and the influence of aberrations by André MARÉCHAL.
3. Diffraction images produced by fully corrected objectives of high numerical aperture, by Harold OSTERBERG & Robert A. MACDONALD.
4. Bases for testing photographic objectives, by L. E. HOWLETT.
5. Quality aspects of the aerial photographic system, by Duncan E. MACDONALD.
6. A mathematical model of an optical system, by Max HERZBERGER.
7. Methods and apparatus for measuring performance and quality of optical instruments, by A. ARNULF.

8. Images quality as used by the Government inspector of visual telescopic instruments, by H. S. COLEMAN.
9. Application of Fresnel diffraction to measurements of high precision, by A. C. S. VAN HEEL.
10. Image structure and test data, by James G. BAKER.
11. Geometrical and interferential aspects of the RONCHI test, by G. TORALDO DI FRANCA.
12. A combined test procedure for camera lenses, and photoelectric examination of intensity distribution in line images, by Erik INGELSTAM and Per J. LINDBERG.
13. Measurements of energy distribution in optical images, by R. E. HOPKINS, Howard KERR, Thomas LAUROESCH and Vance CARPENTER.
14. Optical calculations at the National Bureau of Standards, by Donald P. FEDER.
15. Resolving power of airplane camera lenses, by F. E. WASHER.
16. Theory of resolving power, by E. W. H. SELWYN.
17. A new system of measuring and specifying image definition, by O. H. SCHAFÉ.
18. Position of best focus of a lens in the presence of spherical aberration, by R. KINGSLAKE.
19. Image evaluation by edge gradients, by Arthur Cox.
20. A proposed approach to image evaluation, by R. V. SHACK. Excerpt from letter from T. SMITH.

Optica Acta 1955-02: Vol 1
Iss 4

INTERNET ARCHIVE



academic interest. This was mainly due to the difficulty, or even impossibility, of realising a medium of variable refractive index with the very high degree of accuracy which is required in optics.

In recent years the situation has considerably changed due to the advent of microwave techniques and of their applications. In the first place it is today quite possible to produce an artificial dielectric where the refractive index is a function of position, sufficiently smooth to be considered continuous for microwave applications. In the second place microwaves can be constrained to travel along a surface, as will be explained below. This is a propagation in a two-dimensional RIEMANN space.

On the other hand these kinds of media have proved very useful in the design of a number of ingenious devices for wide-angle and high-speed scanning. As a consequence the application of RIEMANN geometry to geometrical optics has again attracted the attention of many workers. The subject seems still to be far from exhausted and offers a lot of interesting possibilities both to the inventor and to the mathematician.

In the present paper we shall first give a brief outline of previous work which is necessary to understand what follows. Then we shall present a family of two-dimensional non-Euclidean spaces which are perfect optical instruments and correspond each to a possible high-speed scanning system. Three of the

(*) The work described in this paper was carried out under Contract ARDC AF 61 (514)-433 between the *European Office of the Air Research and Development Command* (U.S. Air Force) and the *Centro Microonde del Consiglio Nazionale delle Ricerche*, Firenze.

ACTA

February 1955

enses of revolution (*)

CIA

reetri-Firenze.

he rays from a point feed on a cone of varying aperture. 7) and the sphere are members of this family. A fourth

elles permettent d'obtenir un faisceau de rayons parallèles variable.

erg (fig. 7) et la sphère en sont des cas particuliers. Un bilités d'exploration angulaire.

urieben, bei denen die von einem Punkt ausgehenden . C. A « Lampenschirm », (Abb. 5) die Linse nach RINE-

igenschaften besonders zu erwähnen.

which are already well known will be found ly particular cases of the general class.

us Work. — Early workers in the field of geometrical optics of non-homogeneous media were mainly concerned with media existing in nature such as the terrestrial and solar atmospheres. Only occasional attempts were made to realise artificial non-homogeneous media of cylindrical symmetry with a view to investigating the properties of the eyes of the insects [1].

A theoretical contribution of great interest was made by J. C. MAXWELL in 1854 [2]. He described a system with spherical symmetry having the properties of a perfect optical instrument. MAXWELL stated that his investigation had been suggested by the contemplation of the crystalline lens of a fish; for this reason his system has since been known as « Maxwell's fish-eye ». We shall write the refractive index of the MAXWELL fish-eye in the form

$$(1) \quad n = \frac{2}{1 + r^2}$$

where r represents the distance from the centre. It can be shown that with this system a general point A of space (fig. 1) is perfectly imaged at a point A' ali-

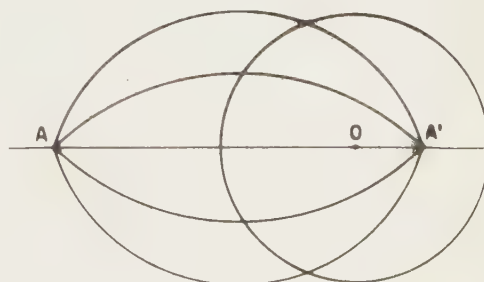


FIG. 1. — MAXWELL fish-eye: a point source A is perfectly imaged at A'.

gned with A and with the centre of symmetry O. Taking O as origin, the abscissae x, x' of A, A' are found to obey the relation $xx' = -1$. On the unit sphere ($r = 1$) the refractive index is unity. A point A of this sphere (fig. 2) will be imaged at the diametrically opposite point A'.

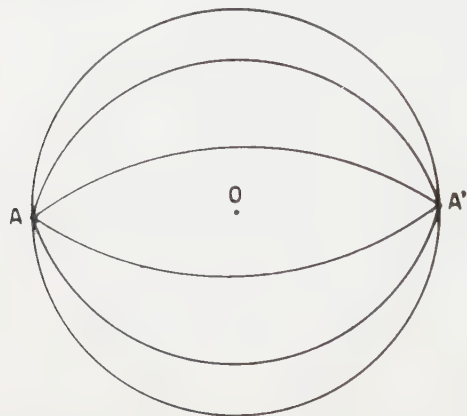


FIG. 2. —MAXWELL fish-eye: a point source A on the unit sphere is imaged at the diametrically opposite point A'.

Another remarkable system with spherical symmetry was described in comparative recent times by R. K. LUNEBERG [3]. The refractive index is represented by

$$(2) \quad n = \sqrt{2 - r^2}$$

for $r \leq 1$ and by $n = 1$ for $r > 1$. Every point A at infinity (fig. 3) has its perfect image A' on the unit sphere.

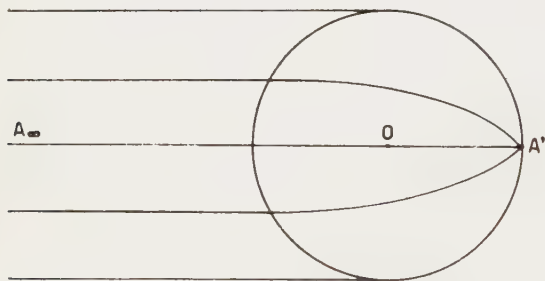


FIG. 3. — LUNEBERG lens: a point source A located at infinity is perfectly imaged on the unit sphere at A'.

A powerful tool for the treatment of the geometrical optics of non-homogeneous media is provided by the theory of RIEMANN spaces. The starting point for this application is represented by the Fermat principle

$$(3) \quad \delta \int n \, ds = 0$$

stating that the optical path is stationary along a ray. Consider then a non-Euclidean space corresponding point by point to the physical (Euclidean) space and having its line element ds_F given by

$$(4) \quad ds_F = n \, ds$$

This space will be called the FERMAT space corresponding to the given distribution of refractive index. By substituting from (4), Eq. (3) transforms into

$$(5) \quad \delta \int ds_F = 0$$

that is into the condition for a geodesic. Hence we can conclude that the light rays of the physical system characterized by a given distribution of refractive index n correspond to the geodesics of the FERMAT space characterized by (4). This correspondence can be very useful since the properties of the geodesics of RIEMANN spaces have been extensively investigated in differential geometry and can be converted into as many properties of the light rays in non-homogeneous media.

The correspondence between the physical and the FERMAT space is a conformal mapping so that the angles are preserved.

A further property of the FERMAT space which shows its profound physical significance has been demonstrated by E. BORTOLOTTI [4] and later, but independently, by R. K. LUNEBERG [5]. Both the electric and the magnetic vectors of a light wave travelling along a geodesic of the FERMAT space remain parallel to themselves in the sense of LEVI-CIVITA. This property may be utilised for determining the direction of polarization of a ray having passed through the system under investigation.

The FERMAT space corresponding to the MAXWELL fish-eye is readily found to be a non-Euclidean space of constant positive curvature, or the three-dimensional equivalent of a sphere. The geodesics of a sphere are great circles and all great circles through a point intersect each other at the diametrically opposite point. This simple remark gives us a very clear and deep insight into the properties of MAXWELL's fish eye.

The author has also investigated the medium corresponding to a FERMAT space of constant negative curvature [6]. A medium of this type is met in submarine acoustics. The methods of differential geometry prove very powerful in this case.

A. SIGNORINI [7] has demonstrated the following property holding for any medium whose FERMAT space has a constant curvature: All light rays are circles and all wave surfaces generated by point sources are spheres (with moving centres).

The interest in the geometrical optics of non-Euclidean spaces has considerably revived with the advent of microwaves. As is well known a wave guide can be formed by two plane-parallel metal plates. The propagation is not substantially disturbed if the plates are bent to assume any desired shape (fig. 4) provided that parallelism is maintained and that the radii of curvature are everywhere large with respect to the wavelength. If the spacing between the plates is sufficiently small we may imagine the wave propagation to occur along the mean surface. Thus we shall deal with a two-dimensional medium having in general a



FIG. 4. — Parallel-plate wave guide.

non-Euclidean metric. The rays will be geodesics of the surface.

Among these surface wave guides, for which the name of *configuration lenses* has been proposed [8] there are some which represent perfect (two-dimensional) optical systems. They have offered a number of new and brilliant solutions to the problem of wide-angle scanning [9], [10]. The problem is that of collimating the radiation from a point feed in such a way that the radiated beam turns through a substantial angle when the feed moves along a given curve (the *feed-line*, preferably a circle).

The simplest type of configuration lens has been developed by H. B. DE VORE and H. IAMS [11]. It consists of two developable surfaces, namely a cone of 60° aperture and a plane base (fig. 5). The rays

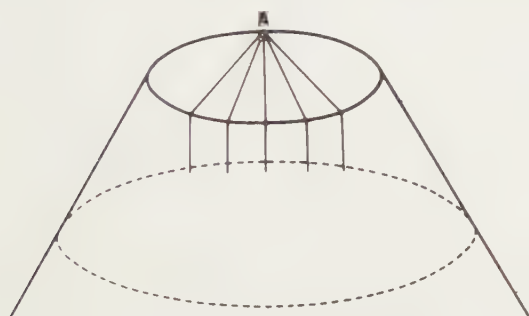


FIG. 5. — The « lamp-shade » configuration lens : a point source A is perfectly imaged at infinite distance on the cone.

from the feed A which moves along the circumference of the base (feed-line) turn out collimated on the conic surface. Because of its peculiar shape this configuration lens is sometimes referred to as the *lamp-shade* lens. In order to utilize the collimated beam for scanning purposes a part of the cone must be deformed and developed on a plane.

A second configuration lens has been described by R. F. RINEHART [12]. His investigation was based on a very interesting approach. Consider Eq (2) to represent a distribution of refractive index on a plane, that is a two-dimensional LUNEBERG lens. If a configuration lens can be found having the same metric as the FERMAT space corresponding to Eq (2) this configuration lens will have the same collimating properties as the Luneberg lens. More generally, consider a plane where the refractive index is any given function $n(r)$ of the radius alone. The corresponding FERMAT space will have its line element given by

$$(6) \quad ds_F^2 = n^2(dr^2 + r^2 d\theta^2) \quad .$$

To simplify the investigation we shall require the configuration lens equivalent to the FERMAT space (6) to be a surface of revolution. The surface will be specified by its meridional curve. We shall choose as coordinates in the meridional plane the distance ρ from the axis (fig. 6) and the arc l of the meridional curve. The line element of the surface will be given by

$$(7) \quad ds^2 = dl^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad .$$

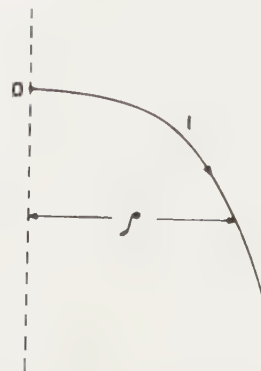


FIG. 6. — Meridional curve of a general configuration lens of revolution.

By requiring identity of (6) and (7) we find

$$(8) \quad n(r) r = \rho$$

and

$$(9) \quad n(r) dr = dl \quad .$$

The last equation yields

$$(10) \quad l = \int_0^r n(r) dr \quad .$$

Finally by solving (8) for r and substituting into (10) we shall obtain a relation between l and ρ which represents the equation of the meridional curve. In the case of the refractive index (2) RINEHART has obtained

$$(11) \quad l = \frac{1}{2} (\rho + \arcsin \rho) \quad .$$

The corresponding meridional curve is shown in figure 7, while figure 8 is a qualitative representation of the complete RINEHART-LUNEBERG lens showing some rays from the point feed A. The surface must be provided with a plane flange on which the rays are collimated. The flange is attached along the feed-line.



FIG. 7. — Meridional curve of the RINEHART-LUNEBERG lens.

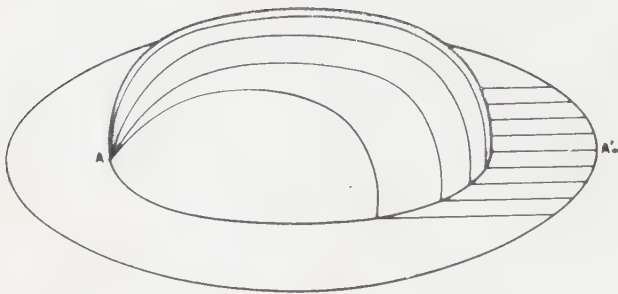


FIG. 8. — RINEHART-LUNEBERG lens: the point source A is perfectly imaged at infinite distance on the plane rim.

A Geometrical Condition to be Fulfilled by Configuration Lenses of Revolution. — We shall now give a rather general definition of a configuration lens of revolution for high-speed scanning. Both the lens of figure 5 and the lens of figure 8 will be found to be particular cases of this definition.

Every lens of this type has a central part (hereafter to be called the *core*) formed by a surface of revolution. The outer part of the lens is a cone of suitable aperture attached to the core along a parallel. The same parallel represents the feed-line. The rays through a point of the feed-line after traversing the core are collimated over the cone surface.

The lamp-shade lens and the RINEHART-LUNEBERG lens represent special cases where the apertures of the outer cones are 60° and 180° respectively.

We shall work out a geometrical condition which is necessary for perfect collimation over the cone surface. Let the circle VIC (fig. 9) represent the feed-

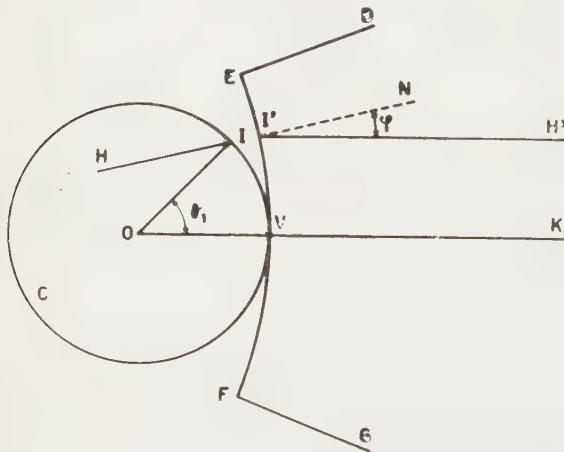


FIG. 9. — Geometrical relations between the core and the cone in a configuration lens of revolution.

line, i. e. the boundary of the core and DEFG a portion of the cone developed in the plane of the feed-line. If we take as unity the radius OV of the core and denote by R the radius of the circle EVF, it is evident that the angular aperture 2α of the cone will be given by

$$(12) \quad \sin \alpha = \frac{1}{R}.$$

Consider a ray from the core intersecting the feed-line in the direction HI which makes an angle φ with the normal to the line (1). This ray will enter the cone at a point I' which coincides with I in the actual lens. Hence we shall have $VI' = VI = \theta_1$. Besides the angle made by the ray I'H' with the normal I'N will be equal to φ (as could readily be shown by a straightforward application of the FERMAT principle). On the other hand in order to obtain collimation we shall require I'H' to be parallel to VK; consequently $\varphi = VI'/R = \theta_1/R$ and by (12)

$$(13) \quad \varphi = \theta_1 \sin \alpha.$$

This is the required condition. The angles of incidence of the rays on the feed-line must be proportional to the azimuths of their points of incidence.

A Class of Non-homogeneous Media Corresponding to Perfect Configuration Lenses. — It seems difficult to work out directly the shape of a core obeying the condition of the preceding section. We shall begin instead by giving a class of plane distributions of refractive index which satisfies that condition. Then by considering the corresponding FERMAT spaces it will be easy to develop a class of configuration lenses of the type required.

The refractive index meeting our requirements is a function of r which in the general case cannot be written down explicitly and is expressed by the relation

$$(14) \quad n^2 r^2 = n^{1/p} (2 - n^{1/p})$$

where p is a positive number. It is readily verified that $n = 2^p$ at the centre ($r = 0$) and $n = 1$ on the unit circle ($r = 1$). It is also of interest to note that (14) for $p = 1$ reduces to (1) (MAXWELL fisheye), for $p = 1/2$ reduces to (2) (LUNEBERG lens) and for $p = 0$ gives $n = 1$ (homogeneous disk). The function $n(r)$ is plotted in figure 10 for different values of p .

Let us now determine the path of a ray which originates at a point A of the unit circle (fig. 11) and includes an angle φ with the radius vector at that point. As is well known, in a spherically symmetrical medium the product $nr \sin i$ where i represents the angle made by the ray with the radius vector is a constant along the ray (BOUGUER theorem). Hence, by considering that both n and r are equal to unity on the unit circle, we see that when the ray intersects the unit circle a second time at I its angle of incidence will again be φ .

Ray propagation in a spherically stratified medium has been thoroughly investigated [13], so we may apply directly some well-known results. Referring to polar coordinates r, θ the differential equation of a ray has the form

$$(15) \quad d\theta = \frac{k dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - k^2}}$$

(1) Note that neither HI nor the normal need be in the plane of the drawing. They are both in the tangent plane of the core at I.

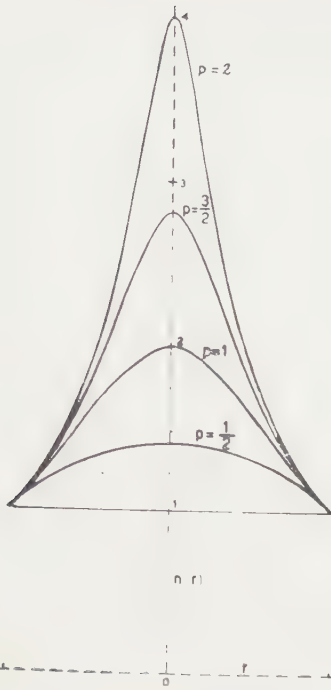


FIG. 10. — The refractive index as a function of r for different values of p .

where k represents the constant product $nr \sin i$.

To integrate this equation we shall refer to LUNEBERG's discussion [14] taking OV as polar axis. In our case simple analysis of (14), which will be omitted here, shows that nr is an increasing monotonic func-

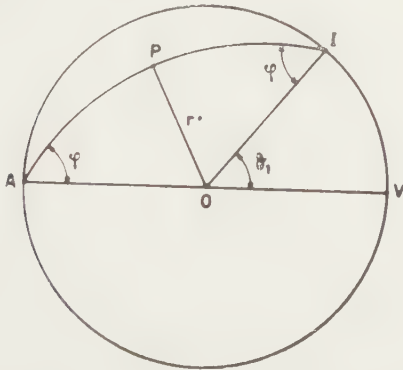


FIG. 11. — Trajectory of a ray within the unit circle.

tion of r . Consequently there will be a value r^* of r satisfying the equation $nr = k = \sin \varphi$ and representing the minimum distance of the ray from the centre (fig. 11). Until this minimum distance is reached at P the equation of the ray is given by

$$(16) \quad \theta = \pi + \sin \varphi \int_1^r \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Hence the azimuth θ^* of P will be represented by

$$(17) \quad \theta^* = \pi + \sin \varphi \int_1^{r^*} \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Beyond P the equation of the ray is given instead by

$$(18) \quad \theta = \theta^* - \sin \varphi \int_{r^*}^r \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - \sin^2 \varphi}},$$

whence the azimuth θ_1 of I is found to be

$$(19) \quad \theta_1 = \theta^* - \sin \varphi \int_{r^*}^1 \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Finally by combining (17) and (19) we get

$$(20) \quad \theta_1 = \pi - 2 \sin \varphi \int_{r^*}^1 \frac{dr}{r \sqrt{n^2 r^2 - \sin^2 \varphi}}.$$

Before evaluating the integral one has to replace n by its expression as a function of r derived from (14). Surprisingly enough the integration can be carried out by introducing a new variable x given by

$$(21) \quad x = n^2 r^2 = n^{1/p} (2 - n^{1/p}).$$

By solving for n we get

$$(22) \quad n = (1 + \sqrt{1-x})^p$$

whence

$$(23) \quad r = x^{1/2} n^{-1} = x^{1/2} (1 + \sqrt{1-x})^{-p}$$

and

$$(24) \quad \frac{dr}{r} = \frac{dx}{2x} + \frac{p dx}{2(1 + \sqrt{1-x}) \sqrt{1-x}}.$$

On the other hand we know that when r varies between r^* and 1 the product nr varies between $\sin \varphi$ and 1; hence, by (21), x will vary between $\sin^2 \varphi$ and 1. Taking into account this remark and substituting (21) and (24) into (20) we obtain

$$(25) \quad \theta_1 = \pi - \sin \varphi \int_{\sin^2 \varphi}^1 \frac{dx}{x \sqrt{x - \sin^2 \varphi}} - p \sin \varphi \int_{\sin^2 \varphi}^1 \frac{dx}{(1 + \sqrt{1-x}) \sqrt{1-x} \sqrt{x - \sin^2 \varphi}}.$$

Now one can verify the following indefinite integrals

$$(26) \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{x - \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\sin \varphi} \arctan \frac{\sqrt{x - \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi},$$

$$(27) \quad \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{1-x}) \sqrt{1-x} \sqrt{x - \sin^2 \varphi}} = \frac{2}{\sin \varphi} \arcsin \left(\frac{\sin \varphi \tan \varphi}{1 + \sqrt{1-x}} - \frac{1}{\cos \varphi} \right).$$

Upon substitution of (26) and (27) into (25) and after some transformations one finds the very simple result

$$(28) \quad \theta_1 = 2(1-p) \varphi.$$

Thus we have shown that θ_1 is proportional to φ as was required by condition (13). This proves that

the relation (14) gives a refractive index having the property announced. The configuration lens corresponding to the FERMAT space of (14) will have the same property because a conformal mapping preserves the values of the angles.

The Perfect Configuration Lenses. — To find the equations of the configuration lenses corresponding to the refractive index (14) one has to apply (8) and (9). It is again expedient to consider the variable x introduced by (21). By combining (8) and (21) we have

$$(29) \quad x = \rho^2$$

and by substituting into (22) and (23)

$$(30) \quad n = (1 + \sqrt{1 - \rho^2})^p$$

$$(31) \quad r = \rho(1 + \sqrt{1 - \rho^2})^{-p}$$

A differentiation of (21) gives

$$(32) \quad dr = (1 + \sqrt{1 - \rho^2})^{-p} \left[1 + \frac{p\rho^2}{\sqrt{1 - \rho^2}(1 + \sqrt{1 - \rho^2})} \right] d\rho$$

This can be transformed into

$$(33) \quad dr = (1 + \sqrt{1 - \rho^2})^{-p} \left(1 - p + \frac{p}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) d\rho$$

If the expressions (30) and (33) are introduced into (10) the integration can be carried out by inspection and we get

$$(34) \quad l = (1 - p)\rho + p \arcsin \rho$$

This is the required equation (1). For each value of p we get a perfect configuration lens.

It is readily seen from (34) that p must be positive; for $p < 0$ would give $l < \rho$ and this is impossible for a real surface of revolution.

The angular aperture 2α of the cone to be attached to each lens can be derived from (13) and (28) and is found to be given by

$$(35) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2(1 - p)}$$

We shall now give a brief discussion of the results (34) and (35).

For $p = 0$ the core reduces to a plane disk ($l = \rho$) and the cone aperture is $2\alpha = 60^\circ$. We have the lampshade lens of figure 5.

When p is increased the core becomes a bulging surface and the cone aperture increases too. For $p = 1/2$ the core becomes the RINEHART-LUNEBERG lens (11)

(1) Note added in proof. The May 1954 issue of the *Jl appl. Phys.*, which was received in this country when the present paper was already submitted for publication, contains a contribution by K. S. KUNZ, who had independently discovered Eq (34). However KUNZ does not mention the cones with negative aperture and the lens of figure 12, which is the best member of the Family.

and the cone attains its maximum aperture $2\alpha = 180^\circ$.

If p is still increased in the interval $1/2 < p < 3/2$ the cone becomes imaginary ($|\sin \alpha| > 1$) and the lens cannot be realised. It is of interest to note that $p = 1$ would give $l = \arcsin \rho$, that is a sphere; this corresponds to MAXWELL's fish-eye.

For $p \geq 3/2$ we get again a real cone, but with negative aperture. This means that the radiation is collimated towards the tapering part of the cone instead of away from the vertex. For $p = 3/2$ we have $2\alpha = -180^\circ$, that is a flat cone. If p increases, the absolute value of the aperture diminishes, until for $p = \infty$ the cone becomes a cylinder.

From (34) one can derive by standard methods of calculus the cartesian equations of the meridional curves. To this end it is convenient to introduce for each curve a coordinate z directed downwards along the axis of rotation and with the origin at the top point of the curve ($z = 0$ for $\rho = 0$). Then by putting

$$(36) \quad w = \sqrt{\frac{p + (2 - p)\sqrt{1 - \rho^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}}$$

and carrying out a lengthy integration one arrives at the cartesian equation required. Three cases must be distinguished. For $p < 2$ the cartesian equation is

$$(37) \quad z = 2(p-1)\sqrt{p} \left(\frac{w}{2-p-w^2} - \frac{1}{2\sqrt{2-p}} \right) + \log \left| \frac{\sqrt{2-p+w}}{\sqrt{2-p-w}} \right| - \frac{1}{1-p} + \frac{1}{2\sqrt{2-p}} \log \left| \frac{\sqrt{2-p+1}}{\sqrt{2-p-1}} \right|$$

For $p = 2$ we have instead

$$(38) \quad z = 4\sqrt{2} \frac{w-1}{w}$$

Finally for $p > 2$ we have

$$(39) \quad z = 2(p-1)\sqrt{p} \left(\frac{1}{\sqrt{p-2}} \arctan \frac{w}{\sqrt{p-2}} - \frac{w}{w^2+p-2} - \frac{1}{\sqrt{p-2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{p-2}} + \frac{1}{p-1} \right)$$

To obtain the equations in explicit form one has to replace w by its expression (36). Equation (37) is not valid for $p = 1$; however we already know that $p = 1$ would give us a sphere.

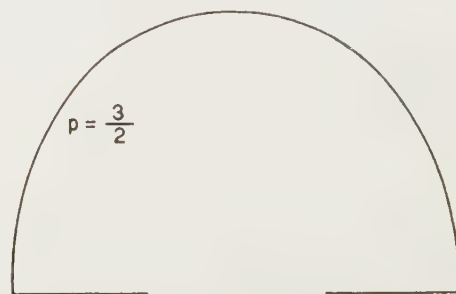


FIG. 12. — Configuration lens corresponding to $p = 3/2$.

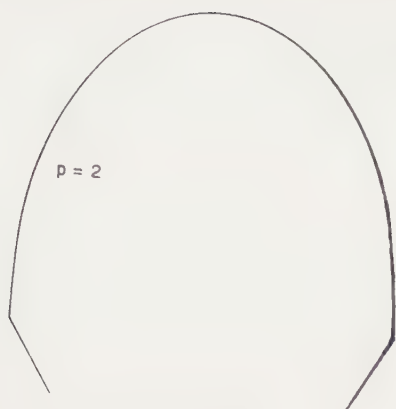


FIG. 13. — Configuration lens corresponding to $p = 2$.

The meridional curves corresponding to $p = 1/2$, $p = 3/2$, $p = 2$ are shown by figures 7, 12, 13 respectively including some portions of the cones.

A very interesting case is that of $p = 3/2$. This lens presents some of the properties of the RINEHART-LUNE-



FIG. 14. — Combination of the lens of figure 12 with a plane mirror.

BERG lens with the additional advantage that by cutting the base disk along a diameter one can obtain a real line source which meets all requirements for good scanning as defined by S. B. MYERS [9]. Screening of the collimated beam by the opposite side of the core could very easily be prevented by means of a plane mirror (fig. 14) or by bending a portion of the base into a cylinder (fig. 15).



FIG. 15. — The lens of figure 12 with a portion of the basis bent into a cylinder.

Conclusion. — The lamp-shade lens, the RINEHART-LUNE-**BERG** lens and the sphere (MAXWELL fish-eye) are members of a family of perfect configuration lenses which are completely described in the present paper.

Oddly enough the best scanning properties are presented by a fourth member of the family which had previously been overlooked. The meridional curve of this lens is shown in figure 12. In practice a plane mirror will be necessary for preventing the beam from being partially screened by the lens itself (fig. 14).

REFERENCES

- [1] see : R. STRAUBEL in *Gehrcke's Handbuch der Physikalischen Optik* (Leipzig, 1927), I, p. 233.
- [2] J. C. MAXWELL, *Cambridge and Dublin Math. Journ.*, **9**, 1954, p. 11.
- [3] R. K. LUNE-**BERG**, *Mathematical Theory of Optics*, Providence, 1944, p. 213.
- [4] E. BORTOLOTTI, *Rend. Acc. Naz. Linc.*, s. 6a, **4**, 552 (1926).
- [5] R. K. LUNE-**BERG**, *l. c.*, p. 57. BORTOLOTTI's priority, which was unknown to LUNE-**BERG**, was kindly pointed out to the author by Professor D. GRAFFI in a private communication.
- [6] G. TORALDO DI FRANCIA, *Rend. Acc. Naz. Linc.*, **8**, 1950, p. 489.
- [7] A. SIGNORINI, *Rend. Seminario Mat. Fis. di Milano*, **20**, 1949.
- [8] J. BROWN, *Microwave Lenses* (London, 1953), p. 101.
- [9] S. B. MYERS, *Journ. Appl. Phys.*, **18**, 1947, p. 221.
- [10] K. S. KUNZ, *Suppl. Nuovo Cimento*, **9**, 1952, p. 322.
- [11] H. B. DE VORE & H. IAMS, *R. C. A. Review*, **9**, 1948, p. 721.
- [12] R. F. RINEHART, *Journ. Appl. Phys.*, **19**, 1948, p. 860.
- [13] E. E. KUMMER, *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1860, p. 405.
- [14] R. K. LUNE-**BERG**, *l. c.*, p. 191.

Manuscrit reçu le 23 juin 1954.

Transparent fibres for the transmission of optical images

H. H. HOPKINS and N. S. KAPANY

Imperial College, London

SUMMARY. — An account is given of earlier experiments [2] in which a flexible bundle of fine glass fibres was successfully used for the transmission of optical images. Some more recent photometric and other studies of the optical properties of fibre bundles are described. The mechanism of transmission of light through these light channels is studied and experimentally verified. An account is given of a new machine for making bundles 75 cm long of fibres of smaller diameter, of the order of 25μ , and subsequently straightening the bundle so that all the fibres are of equal length. A study is made of different factors affecting the resolving power of such « static scanning devices » and measurements made on the resolution of periodic gratings are described. Some further applications of such fibres and fibre bundles are described.

SOMMAIRE. — Il a été montré dans une première publication [2] qu'un faisceau flexible de fines fibres de verre avait été utilisé avec succès pour la transmission d'images optiques.

On présente quelques études (photométriques et autres) concernant les propriétés optiques du faisceau de fibres.

Le mécanisme de transmission de la lumière à travers ces conduits lumineux est étudié et vérifié expérimentalement. On décrit une machine nouvelle permettant de fabriquer des faisceaux, longs de 75 cm et faits de fibres de petit diamètre de l'ordre de 25μ , et de redresser ensuite le faisceau pour que toutes les fibres soient d'égales longueurs.

On étudie les différents facteurs agissant sur le pouvoir séparateur de tels « organes d'exploration statique » et l'on présente des mesures de résolution effectuées à l'aide de réseaux périodiques. Description de quelques autres applications de ces fibres optiques et faisceaux de fibres.

ZUSAMMENFASSUNG. — Es wird über frühere Versuche berichtet, bei denen ein biegsames Bündel von Glasfäden mit Erfolg für die Übertragung optischer Bilder benutzt wurde. Es werden einige neuere Untersuchungen — auch photometrischer Art — über die Eigenschaften solcher Faserbündel mitgeteilt. Die Versuche über den Vorgang der Lichtübertragung durch solche Lichtkanäle stehen mit den Überlegungen im Einklang. Mit Hilfe einer neuen Maschine kann man Faserbündel von 75 cm Länge herstellen, bei denen der Querschnitt der einzelnen Faser in der Größenordnung von 25μ liegt. Die verschiedenen Einflüsse auf das Auflösungsvermögen und das Raster werden untersucht und das Auflösungsvermögen an Hand von Gittern gemessen. Solche Fasern und Faserbündel lassen sich für verschiedene Zwecke verwenden.

1. Introduction. — A new kind of optical unit using the principal of « static scanning » was recently described [2] in which use was made of a bundle of fibres of transparent material to convey optical images along flexible axes. Some preliminary experiments and some properties of such systems were described. A brief description of the mechanism used for aligning the fibre bundles in the initial stage was also given. The results obtained using 60μ diameter fibres giving 4 lines/mm resolving power and good light transmission, lead to the necessity for more precise evaluation of the system. It was found desirable to go into more detail regarding the mechanism of light transmission through such light channels and photometric data was obtained. It was then proposed to construct a fibre bundle of 75 cm length using 25μ (or less) diameter fibres. The principle of a new machine which was designed for this purpose is described in what follows. This machine makes possible the construction of a 75 cm long fibre bundle, all the fibres being subsequently made of equal length by means of a cam device, which is also described. The speed of winding is increased by using « multistart guide pulleys ». Different factors affecting the resolving power of such systems are discussed. Some more recent applications of fibres for « field flattening » of optical lens systems and « light funnels » for conduction of light from, for example, a circular star image to a slit shape, are also dealt with.

For « field flattening », the entrance end of the fibre bundle is smoothly curved to the shape of the image

surface of the preceding lens system and the exit end of the fibre bundle is made plane or given the curve required to flatten the field through the eyepiece. For use as « light funnels » in the spectroscopic analysis of star images, the image of the star is made to fall on a circular bundle of fibres and the other ends of the fibres are arranged in a line to form the slit of the collimator. Thus most of the light flux contained in the star image is « funnelled » into the spectrometer slit.

2. Conduction of light along a single fibre. — Theoretical considerations suggest that visible light can be conducted through fibres down to about 12μ in diameter, whereas below these diameters diffraction effects become predominant, the fibres act as wave guides and a significant fraction of the energy escapes through the walls.

To test the conduction of light through long fibres a B. S. C. glass fibre 25μ in diameter and 75 cm long was used. Light from a strong source was condensed on one end of the fibre which was made to lie along a sharp curve, the other end being observed under a low power microscope — sufficient light was conducted through the fibre to give a bright image in the microscope.

It can be easily seen that the length of path along a multiply reflected ray is $L \sec I'$ where L is the axial length of the fibre and I' the angle the ray in the glass makes with the axis of the fibre. It is independent of the diameter of the fibre D . In a straight fibre the direction of the emergent ray is the same as or opposite to that of the entrance ray according as the num-

(*) Paper presented to Florence Meeting on Problems in Contemporary Optics (10-16 september, 1954).

ber of reflections is even, or odd. It can also be seen that the number of reflections in a straight fibre is $L \tan I'/D$. In a fibre of 25μ diameter for $I = 10^\circ$ and $N = 1.5$ the number of reflections is 116 per 2.54 cm of length. The enormous number of reflec-

tions in the fibre indicate the necessity of keeping the fibre surface very clean otherwise light is lost at every reflection.

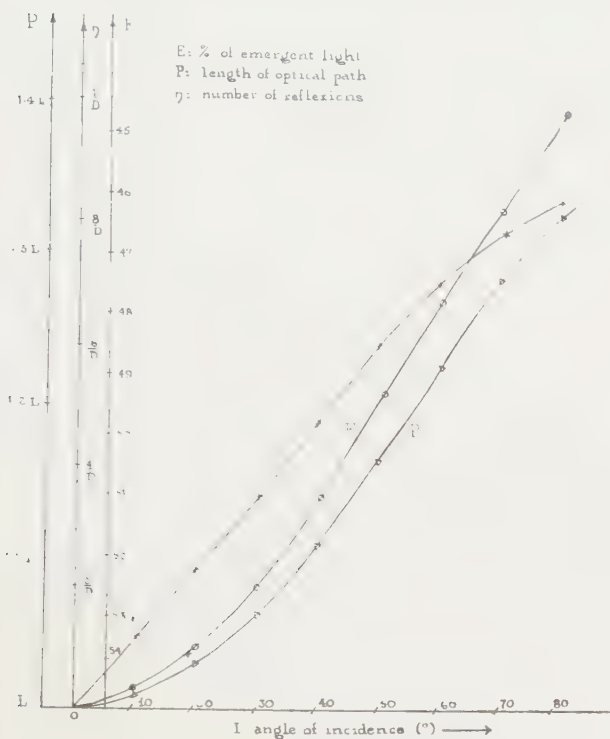


FIG. 1. — Transmission, path length and number of reflections as a function of angle of incidence.



FIG. 2. — Ray path in a curved fibre.

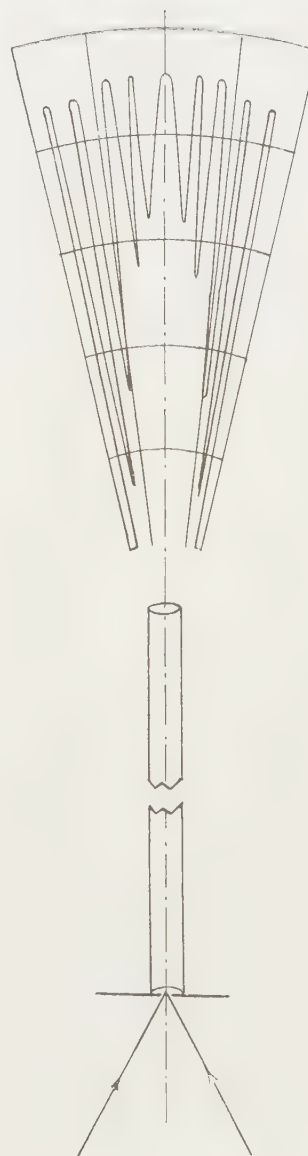
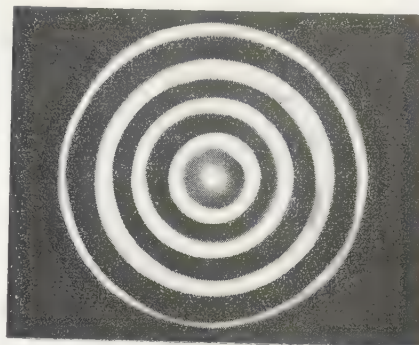


FIG. 3. — Polar diagram of light emerging from a fibre.

The absorption of light during its passage through the fibre depends on the length of path and the absorption coefficient of glass. The transmission of the fibre T for a refracted beam at an angle I' is given by $\log_e T = -\alpha L \sec I'$. For a fibre of 75 cm axial length and co-efficient of absorption 2 % per inch, the percentage emergent light is 51 % for a ray inclined at 40° to the axis and approx. 54 % for the axial ray. The accompanying graph figure 1 gives the length of path, number of reflections and percentage transmission of straight fibres for light at different incident angles.

It can be seen by reference to figure 2 that for fibres of material with refractive index 1.5 to be used for light incident at angles up to 40° to the axis the allowable bending radius is approximately 3 times the diameter of the fibre before the incidence is less than critical. So long as the fibre is bent over a radius greater than three times its diameter there is no danger of light escaping from the wall.

If light is condensed on a small aperture placed on the axis at one end of a straight glass rod, whereby a cone of light is passed axially through the cylinder, then if we put a screen at the further end, we observe annular dark and bright rings. Each ring corresponds to a reflection that a part of the light cone suffers at the walls of the cylinder. Figure 3 illustrates this polar distribution of light at the exit end of the cylinder. It was found that, in spite of the ring formation, the extreme angle of the exit cone is equal to

that of the entrance cone. The number of bright rings is equal to the number of reflections that the extreme ray suffers.

Fibres drawn from molten glass or other materials are found to suffer from slight inhomogeneities. A collimated beam passed through a straight glass rod of approximately 1 mm diameter placed between cross polaroids, was found to show the characteristic fan appearance (fig. 4). It suggests that the strata of varying refractive index have circular symmetry about the axis, which may well indicate that there is a stress system in drawn glass fibres accounting for their great tensile strength. FAUST (1952) has studied these radial inhomogeneities in fibres in terms of local variations of refractive index, by means of multiple beam interference microscopy. Optically inhomogeneities of this kind do not present any difficulty for the present applications.

3. Optical Insulation. — The image conveying property of a bundle of fibres could suffer from glare and thereby a deterioration in contrast if there were a considerable light leakage due to frustrated total internal reflection.

The penetration of light incident at an angle greater than the critical angle through a thin film can be demonstrated by reflecting light from the diagonal face of a right angled prism which is separated from the diagonal face of another right angled prism by a thin film of dielectric of lower index. It has been shown that the maximum depth of penetration is about 3λ for glass-air interfaces. Experiments were conducted to observe the conditions and magnitude of light leakage from a light conveying fibre into the neighbouring six fibres surrounding it. A bunch of fine and long glass rods were roughly aligned so that each rod has the same corresponding position at two ends. The ends of the rods were ground and polished. First, the image of a bright point source was formed on the triangular interstitial space between the rods and it was found by observing the other end that light had spread in the neighbouring rods, producing a glare due to air-glass refraction and reflections at the surrounding rods. This necessitated the blocking of interstitial spaces. It is to be noted that this blocking can be done by neither an opaque medium, which will absorb light at every reflection, nor by a transparent medium which will render the bundle of fibres optically a mass of nearly constant refractive index and thus destroy the optical insulation. It was found in practice that a very thin layer of finely powdered glass filling the interstices effectively blocked them without upsetting the optical insulation.

The image of a bright point source was focussed on the end face of a glass rod and it was found that with glass rods of 1 mm diameter, optical line contact is not easily established, and for this reason, no light leakage into the neighbouring rods was observed at the exit end.

An approximate calculation of the percentage of

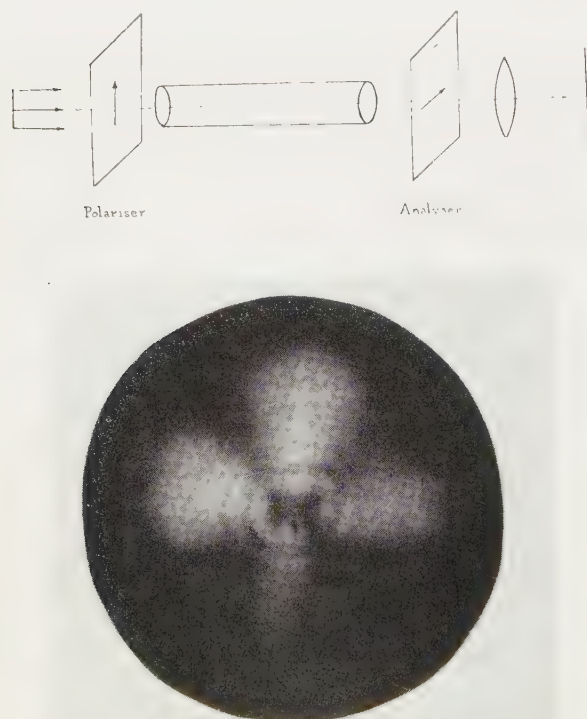


FIG. 4. — Strain polarisation in a drawn fibre.

light leakage from a light-conveying fibre into its neighbouring fibre assuming that there is optical line contact between the two fibres was made. The use of a fibre bundle 6.25 mm in diameter with 25 μ diameter fibres was considered and it is assumed that the preceding lens system works at ± 1 magnification. The inclination of the extreme ray from the marginal object point to the axis of the axial fibre is approximately 14° . This ray gets refracted in the fibre

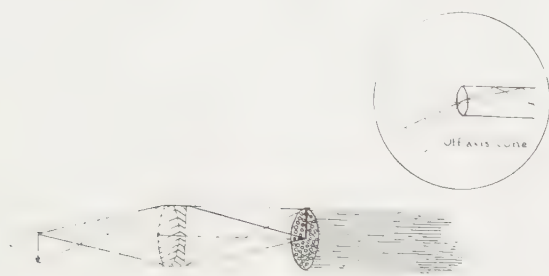


FIG. 5. — Optical arrangement at the receiving end of fibre bundle.

($N = 1.5$ approx.) at approximately 10° . Since Φ_0 the angle that this ray makes with the fibre wall is $\frac{\pi}{2} - \Gamma' = 80^\circ$, in our calculation of light flux leakage Φ_0 goes from 80° to 90° . The arrangement is shown diagrammatically in figure 5.

The accompanying graph figure 6 shows the percent-

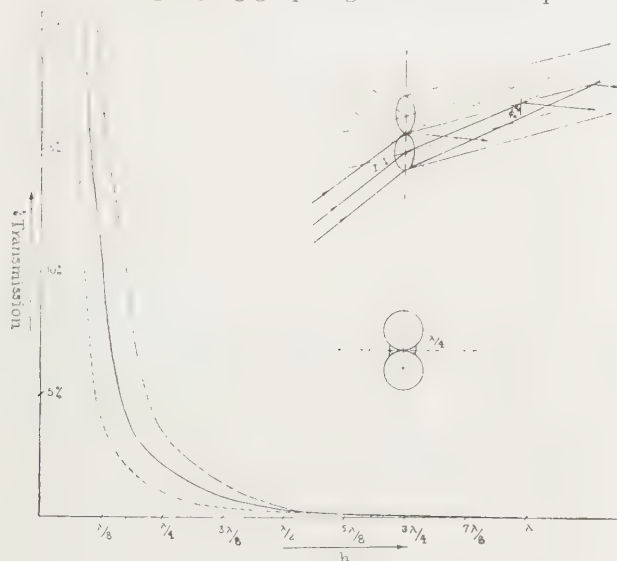


FIG. 6. — Leakage due to frustrated total internal reflections at adjacent fibres.

tage transmission of light for a wave incident at the fibre wall at an angle of 80° as a function of the separation between the fibres. The light leakage at this angle is significant only up to a distance of $\lambda/4$ where the transmitted light is approximately 1 %. In making these calculations the appropriate boundary conditions were applied by inserting the imaginary value of Φ_1

the angle that the wave makes in the 2nd medium, $\cos \Phi_1 = i \sqrt{\left(\sin \Phi_0 \frac{N_0}{N}\right)^2 - 1}$ and thus the integrated percentage transmission was calculated for an incident wave with the plane of polarisation parallel or perpendicular to the plane of incidence.

It is thus seen that for fibres up to 25 μ diameter used in such a device with a preceding lens system used as described the maximum light flux leakage is of the order of 4 %, even if it is assumed that there is perfect line contact between a light conveying fibre and its neighbour. For this reason no coating of fibres was deemed to be necessary.

4. Resolving Power. — The resolving power of fibre systems depends primarily on the diameter and separation between the fibres. In practice there are some difficulties in obtaining perfect alignment, and fibres of constant diameter. However, continuous lengths of 25 μ diameter glass fibres have been obtained with ± 10 % variation in diameter, produced by a drawing process.

Two possible arrangements of fibres are shown in figure 7. In (a) the centres of fibres form square, and

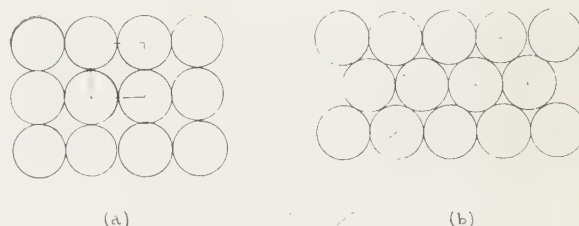


FIG. 7. — Geometrical arrangement of fibres.

in (b) the centres of fibres form equilateral triangles. It is found desirable both from the point of view of mechanical stability of the bundle of fibres and minimum loss of detail in the image, to choose arrangement (b) in which the centres of fibres form triangles and the dead area in the interstitial space is only 9 % as compared to 21.5 % in the case (a).

To test the alignment of the fibres, the image of a sharp edge is formed on one end of the fibre bundle and the other end of the bundle is observed under magnification. Light falling on any one fibre is distributed uniformly over the end face of the fibre on emergence. Moreover, if the image of a straight edge is formed on the object face of the fibre bundle, the boundary of the edge will not generally lie across a single row of fibres the centres of which are in a straight line, except in three particular positions. In consequence the image of the straight edge will be "broken", but the discontinuity will never extend more than one fibre diameter into the dark portion of the image. The image of the knife edge is scanned over the fibre bundle and rotated to change the orientation and the discontinuities in the edge image are observed in

all positions which gives us an evaluation of alignment.

Due to the relative positions of the fibres the detectable size of detail through the fibre bundles is of the order of twice the diameter of the fibres D , providing the alignment is perfect and the optical insulation between the fibres is maintained. Thus the resolving power in terms of lines per inch is approximately $1/4 D$ where the width of each dark and bright line is $2D$.

Measurements of resolving power were made on different lengths of fibre bundles varying from 3 cm to 10 cm, using $60\ \mu$ diameter glass fibres, by means of a grating test object. The intensity distribution in the image was measured by photographing the images of periodic gratings through the fibre bundle and subsequently measuring the density on a microdensitometer. The accompanying graphs (fig. 8) show the photo-

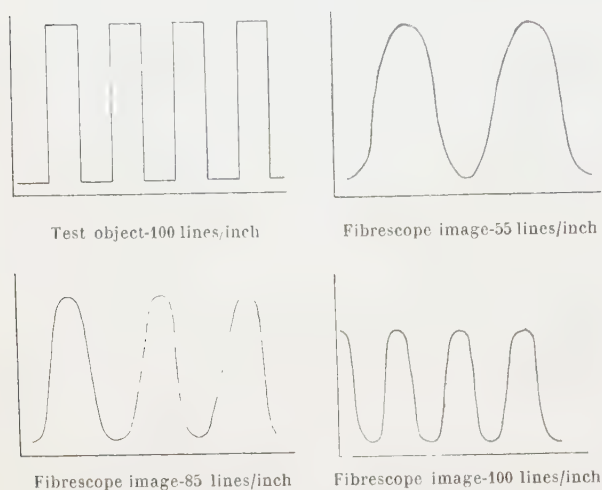


Fig. 8. — Photometric measurements on grating images.

metric measurements made on the image of periodic gratings from 55 to 100 lines/inch. Slight discontinuities on the curves were observed, due to the graininess of the fibres and fine scratches magnified on the micro densitometer. It is to be noted that $60\ \mu$ diameter fibres should theoretically give 4 lines/mm resolving power, which was easily obtained. It was observed that for periodic gratings above the limit of resolving power of the system, the image end gave a uniformly illuminated field.

It was observed during the measurements of resolving power that, when the test object was just above the limit of resolution and revolved in its own plane, the lines were not resolved in any positions but three. These three positions are those when the lines of the grating coincide with the line joining the centres of fibres, as is illustrated in figure 7.

5. Fibre Aligning Machine. — The method used for alignment of the fibres depends on the availability of nominally infinite lengths of fibres of constant diameter of some optically transparent and homo-

geneous material. Very fine fibres are being made of materials such as glass, quartz, nylons and polystyrene. Of these, glass fibres seem to be the only ones which satisfy most of the requirements and are easily procurable. Glass fibres are preferred also because of their great tensile strength.

Long lengths of glass fibres were uniformly wound on a former having a peripheral groove of square cross section, layer by layer, so that each layer was led to lie on the V groove made by the previous layer. This arrangement is preferred because of close packing and thereby minimum loss of detail and also because of the greater resulting mechanical stability. After winding the required number of layers, the bundle was gripped at different points by means of mechanical clamps which were an integral part of the former. The clamps were tightened, the fibre stack slipped from the former and sawn at different points between the clamps to yield different lengths of fibre bundles.

Fibre bundles of 0.6 cm cross section and of lengths varying from 2.5 cm to 12.5 cm, using $60\ \mu$ diameter fibres were produced in this way. These fibre bundles were tested for alignment and resolving power and gave the theoretically expected performance. The bundles were found to be very robust and flexible. The above mechanism had two inherent drawbacks, from the point of view of obtaining long lengths of finer fibre bundles. Firstly, the safe speed of fibre winding with this mechanism using $60\ \mu$ diameter fibres was about 750 cm/min. and 500 cm/min. for $25\ \mu$ diameter fibres. At this speed of winding with the above mentioned mechanism the proposed fibre bundle 0.5 cm cross section and 75 cm long using $25\ \mu$ diameter fibres would amount to winding approximately 50,000 metres of fibre at the winding speed of 500 cm/min. Secondly, when the fibre bundle is removed from the circular former and straightened, then, due to the topmost layer being wound on a greater radius than the bottom layer, there is a sag introduced in the bundle of fibres, all the fibres not being of equal length.

The new machine employed "multistart guide pulleys" to wind more than one fibre at the same time. The first layer is wound on the former by means of one of the leads. If n is the number of leads and N the number of turns required to wind one layer on the former then after every N/n turns the next fibre was fed in, and when any particular lead completed the layer, the fibre was fixed on the finishing end of the former through a slot and the lead brought back to restart the top most layer. A nut and screw mechanism with ten to one leverage was used to lead the slide on which the lead pulley is mounted. A countershaft is used to transmit power from the main spindle on which the former is mounted to the screw member S. This new mechanism (fig. 9) made it possible to transmit the precise lead to all the guide pulleys, using only one coarse lead screw. The portion of nut which is fitted on the end of the lever can be disengaged and by location on a locating screw brought back to the initial positions. The ten to one leverage employed

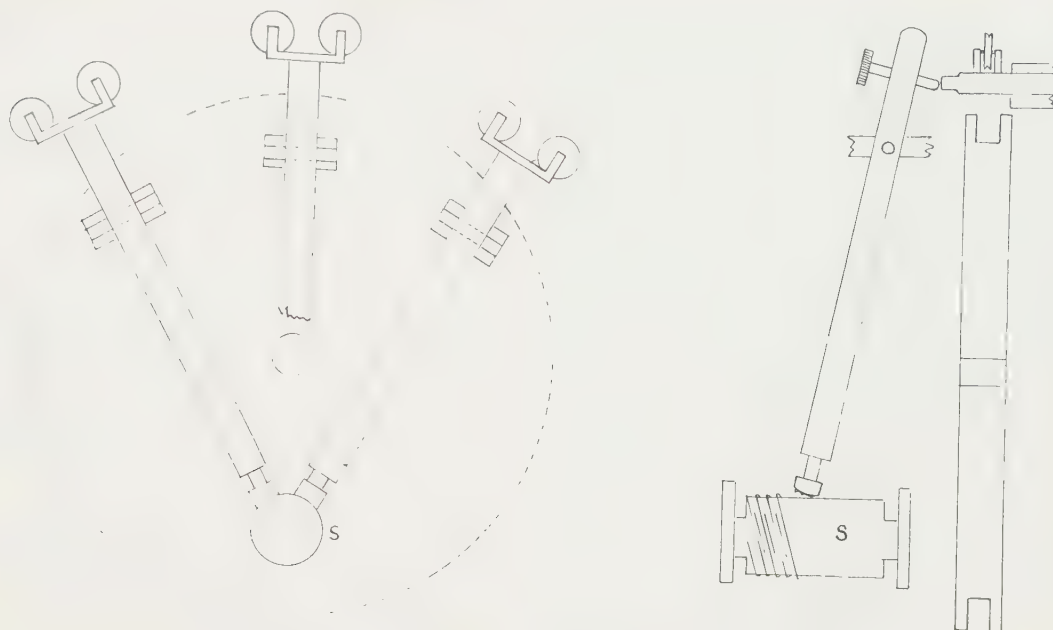


FIG. 9. — Multistart arrangement of guide pulleys.

minimises the errors of the lead screw and helps in transmitting motion whose pitch is equal to the diameter of the fibre used.

The difference in length of fibres in the bottom and top layer is $2\pi\delta R$ where δR is the thickness of the fibre bundle; it is independent of the diameter of the main former. In the cam device (fig. 10) used for the straightening of fibres, a part of the bundle of fibres from the main former is wound on a subsidiary roller of smaller radius, which takes up the variation of length in the fibres as they are unwound from the main former.

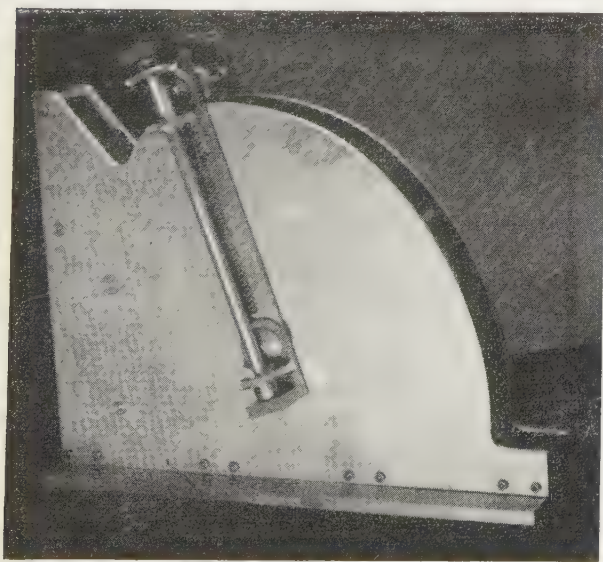


FIG. 10. — Photograph of cam mechanism.

Figure 11 shows the geometry of the system in which R is the radius of the former, and r is that of the subsidiary roller. The fibre bundle is sawn off at the top of the former along the y axis and fixed to the roller. The centre of the roller is then made to describe a locus defined by the cam, orientation of the roller

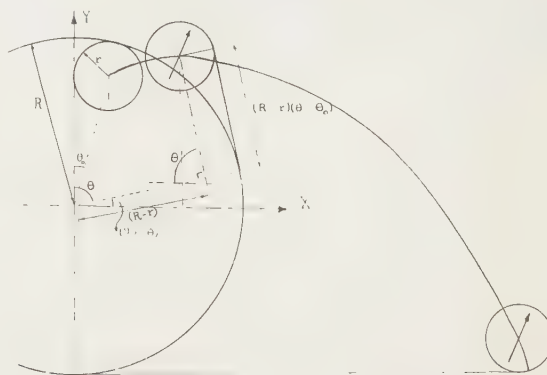


FIG. 11. — Geometry of cam straightening unit.

being kept constant in space. After traversing the required locus the centre of the roller r is in a position where part of the fibre bundle is wound round the semi-circle of the roller, and the remainder lies horizontally as a straight bundle of fibres, the co-ordinates of the centre of the roller, the parametric equations of the required locus, are

$$\begin{aligned} x &= (R - r) \sin \theta - (\theta - \theta_0) \cos \theta \\ y &= (R - r) \cos \theta + (\theta - \theta_0) \sin \theta \end{aligned}$$

in which θ, θ_0 are the angles indicated in figure 11.

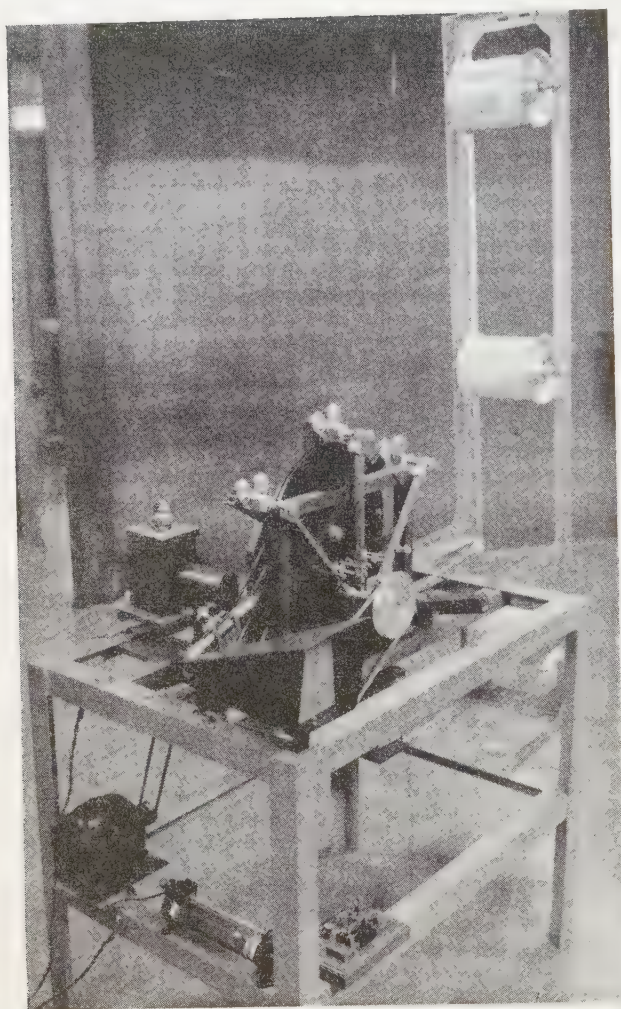


FIG. 12. — General view of aligning machine.

After the winding of fibres is completed, the former is transferred to the cam device. A simple system of bevel gears attached to a rotatable arm keeps the orientation of the roller constant in space, and the axle of the roller is spring loaded against the cam profiles. The cam is precisely formed so that the fibre length, as it is being unwound from the former is tangential both to the former and the roller, to avoid any dislodging of fibres. This whole operation is repeated on the other half of the former and the straight length in between the two rollers is taken for use.

Figure 12 shows a general view of the machine used for winding three fibres simultaneously. The fibre is unwound from three creel carriers which are mounted on ball races and a constant tension exerted by spring loading. Before going on the guide pulleys which provide the precise lead, the fibre passes over anti vibration pulleys which damp down any vibrations that may be set up in the running of the fibre. A micro-projector using a vertical illuminator is used to observe the winding of fibre as it proceeds.

6. **Further applications.** — An obvious use of fibre bundles is for transferring an optical image from a surface of given shape to one of a different shape. In particular a flexible viewing system of the kind illustrated in figure 13 may be designed in which the receiving surface has a curvature equal to the Petzval curvature of the objective system and the transmitted image is made to appear on a surface of such a shape that the image viewed by the simple eyepiece is field-flattened.

An experiment of this kind was performed, and an image formed on a surface having a curvature equal to about 25 mm was successfully transferred to a plane.

Another useful application of systems of this kind is in what might be termed light funnels. If, for example, a light source of any other shape has to be used



FIG. 13. — Use of fibre bundle with curved end faces.

in conjunction with an instrument having an annular entrance pupil, an annular bundle of fibres may be formed by clamping one end of a bundle in an annular clamp. The other ends of the fibres may then be gathered together into a shape similar to that of the source to be used. A condenser lens is then employed to form an image of the light source on the end face of the fibre bundle, the other end face thereby providing a secondary source of the desired shape.

Experiments of this kind have been undertaken with a view to funneling the light from a telescope star-image into a slit-shape suitable for illuminating the entrance of a spectrograph. In this way a considerable increase in efficiency seems possible to be achieved. Since the illumination is not constant over the area of the star-disc, care has to be taken to arrange a correct correspondence between each fibre position at the star-disc and the point on the entrance slit to which that fibre is led. In this way an approximately uniform illumination of the slit may be obtained.

7. **Acknowledgement.** — This work has been financed by a grant from the Royal Society Paul Instrument Fund. We are further indebted to Fibreglass Ltd. for their kindness in specially providing glass fibres.

REFERENCES

- [1] FAUST R. C., *Proc. phys. Soc. B*, Vol. LXVII, 1954, p. 138.
- [2] HOPKINS H. H. and KAPANY N. S., *Nature*, 173, 1954, p. 39.

Eye-movements in relation to retinal action (*)

R. W. DITCHBURN,
University of Reading, England

SUMMARY. — Experiments are described in which the subject wears a contact lens to which small flat mirrors are attached. Beams of light reflected from these mirrors are received on a recording drum and may be used to record the rotations of the eye about three mutually perpendicular axes. When the subject is fixating a target as closely as possible, involuntary movements of the eyeball scan the visual axis through angles which are large compared with the visual angle corresponding to the diameter of a retinal receptor.

By using the beam reflected from the contact lens it is possible to present the subject with an object which moves so that its image on the retina remains stationary. It is found that the contrast sensitivity and visual acuity in respect of this image are much less than in normal vision. Results are discussed in connection with the recordings of nerve impulses made by HARTLINE [7]. It is suggested that appreciation of a pattern is controlled by a strong response of the receptors when the eye is scanned across the pattern by the normal involuntary movements.

SOMMAIRE. — Description d'expériences dans lesquelles le sujet porte un verre de contact auquel sont fixés 2 petits miroirs plans. Les rayons lumineux réfléchis par ces miroirs sont reçus sur un tam pour enregistreur et peuvent être utilisés pour l'étude des rotations de l'axe par rapport à trois axes perpendiculaires. Si ce sujet fixe un point aussi attentivement que possible, des mouvements involontaires du globe oculaire font osciller l'axe visuel dans des angles qui sont grands comparativement au diamètre angulaire des récepteurs rétiniens.

En utilisant le rayon réfléchi par la lentille de contact, il est possible de présenter au sujet un objet se déplaçant de telle sorte que son image sur la rétine reste stationnaire. On trouve que la sensibilité au contraste et l'acuité visuelle pour cette image sont moindres qu'en vision normale. Discussion des résultats en fonction des mesures d'impulsions nerveuses dues à HARTLINE [7].

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Versuchspersonen tragen ein Kontaktglas, an das kleine ebene Spiegel befestigt sind. Die von diesen Spiegeln reflektierten Lichtstrahlen werden aufgezeichnet und zur Messung der Augenbewegungen um drei zueinander senkrecht zueinander benützt. Auch bei möglichst scharfem Fixieren eines Zieles erfolgen unwillkürliche Bewegungen des Augapfels um die Sehachse über Winkel, die im Vergleich zu dem Winkel, welcher dem Durchmesser des einzelnen Netzhautelementes entspricht, beträchtlich sind.

Mit Hilfe des von dem Kontaktglas reflektierten Lichtstrahls ist es möglich, der Versuchsperson ein Ziel darzubieten, welches sich so bewegt, dass sein Bild auf der Netzhaut stets auf die gleiche Stelle fällt. Es wird befunden, dass für dieses Bild die Kontrastempfindlichkeit und Sehschärfe viel niedriger als im normalen Sehen sind. Die Versuchsergebnisse werden im Bezug auf die von HARTLINE [7] angestellten Aufzeichnungen von Nervenimpulsen erörtert. Es wird angeführt, dass insofern es sich um die Betrachtung von gestalteten Gebilden handelt, die Betrachtung solcher Gebilde durch starke Reaktionen der Netzhautelemente geregelt wird, während das Auge durch normale unwillkürliche Bewegungen über das Gebilde hinweg getragen wird.

1. Introduction. — LORD and WRIGHT [8] give a summary of work on eye-movements up to 1950 and accounts of later work are given by BARLOW [2], DITCHBURN and GINSBORG [4] and RIGGS, ARMINGTON and RATLIFF [12]. Detailed reference to earlier work will not be made in the present paper but it may be stated that none of the results presented here are in conflict with the results obtained by other workers in recent years. The work quoted above shows that, even when the subject is looking as steadily as he can at a well-defined fixation point, the eye is never free from movement. There is a high frequency rotation of the eyeball which vibrates the retinal image of the object with an amplitude approximately equal to the intercone distance. The eye also moves so that the image of the fixation point drifts slowly in an irregular way, being brought back near to the centre of the fovea by flicks which occur about once a second. These two movements allow the image of the fixation point to wander over a retinal region of about $100\ \mu$ diameter containing about 1500 cones.

By a device which will be described below it is possible to produce an « object » whose image on the

retina does not move in response to eye-movements. Observations on this stabilised retinal image were made by the present writer in 1946 but were not published then owing to uncertainty concerning experimental conditions. The first publication was made by DITCHBURN and GINSBORG [3]. Shortly afterwards RATLIFF [10] reported that he had obtained the stabilised retinal image and gave the results of a detailed investigation on visual acuity.

2. Experimental methods. — The apparatus used by DITCHBURN and GINSBORG for recording eye-movements is shown in figure 1. Light from the high pressure mercury arc S is passed through a heat removing filter F and focussed on to the pin-hole at A. Light from this pin-hole is focussed by the lenses L_2 and L_3 upon the plane mirror M which is worked on the contact lens. A system of two slits, S_1 and S_2 , is placed as shown. The image of one of these slits is focussed directly by the lens system L_3 upon the drum camera C. Light from the other slit passes through a prism which rotates the image from horizontal to vertical before it is focussed upon the drum camera. We thus have the essentials of a projector system in which the maximum light is passed through the

(*) Paper presented to Florence Meeting on Problems in Contemporary Optics (10-16 september, 1954).

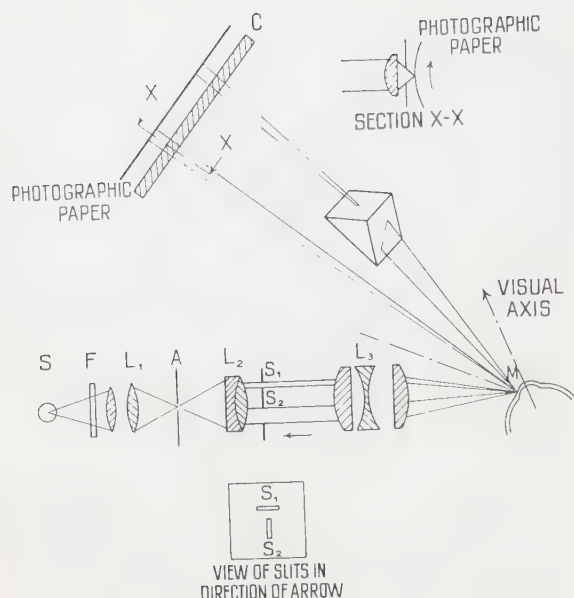


FIG. 1. — Apparatus for studying eye movements by DITCHBURN and GINSBORG.

stop formed by the small mirror M but the image of the target is formed at the correct place for recording. The plane mirror is worked on the corneal portion of the contact lens at approximately 35° to the visual axis. With this apparatus it is possible to record angular rotations (H) in a horizontal plane and (V) in a vertical plane including the visual axis. It is necessary to divide by the cosine of the angle between the normal to the mirror M and the visual axis in calculating the angular rotations (V) from the record of the reflected beam.

The modifications introduced by FENDER are shown in figure 2. The contact lens has been fitted with a

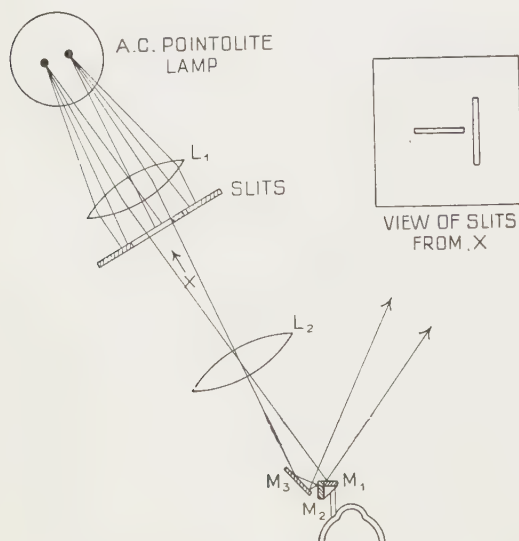


FIG. 2. — Modification to Eye-movement apparatus introduced by FENDER.
L₁ and L₂ are good quality photographic lenses.

small plastic rod, and two mirrors, mutually at right-angles, are mounted upon this stalk. The source of light is now an alternating current pointolite and the two balls are turned so that the line joining them is at right-angles to the axis of the system L₁, L₂. The image of one ball is formed upon the mirror M₁ and the image of the other on the mirror M₂. The normal to M₁ is very nearly parallel to the visual axis and the light reflected from this mirror gives horizontal and vertical (H and V) rotations as in the arrangement used by DITCHBURN and GINSBORG. Light from the mirror M₂ is reflected at the fixed mirror M₃ and reaches the drum camera. It enables records to be obtained

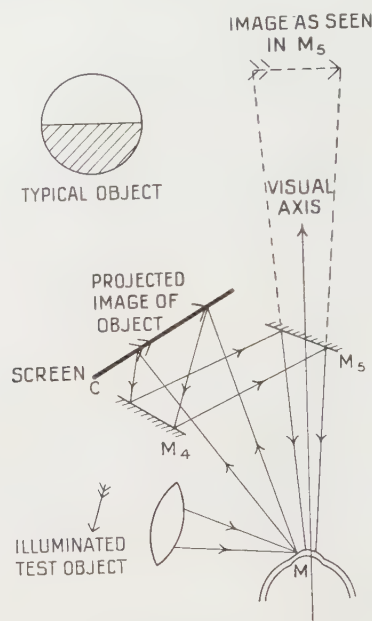


FIG. 3. — Apparatus for producing a stabilised retinal image.

of rotations (T) about the visual axis itself and also gives a second record of rotations in a horizontal plane. The contact lenses used are specially worked and made to fit the eye very tightly. It has been shown (DITCHBURN and GINSBORG [3] and RIGGS *et al.* [12]) that the contact lens follows the movements of the eye very accurately. The lens used by DITCHBURN and GINSBORG has the advantage that there is no interference with the subject's normal vision apart from the necessity of making him wear the contact lens. It may appear that the stalk, used in the apparatus as designed by FENDER, is a serious disadvantage since the lens will be moved every time the subject blinks. This disadvantage is, however, found in practice to be much less than might have been expected. It is found that within a very short time after a blink the contact lens returns accurately to an equilibrium position, but in most records the subject does not blink.

The apparatus used to produce a stabilised image is shown in figure 3. The optical system used before the mirror M is similar to that shown in figure 1 ex-

cept that the test object replaces the slits S_1 and S_2 . Light reflected from the mirror M is rotated through twice the angle by which the eye has rotated. It is therefore necessary to introduce an effective angular demagnification of a half in order to produce a retinal image which does not move when the eye rotates in its socket. A screen C replaces the drum camera previously used for recording but this is not viewed directly. It is seen by reflection in the mirrors M_4 , M_5 . When the total path from the eye to the screen C via the mirrors M_4 and M_5 is approximately twice the length of the direct path from the mirror M to the screen the angular movement of the image on the screen relative to the eye is zero. This adjustment may be checked if the eye is replaced by a telescope with a small plane mirror attached to its object glass. When the adjustment is correct the position of a point on the image with respect to the cross wires is unaffected by a small rotation of the telescope. When the contact lens shown in figure 1 is used it is possible to stabilise the image in respect of rotations about one axis only unless an anamorphic optical system is used in place of the mirrors M_4 and M_5 to introduce a demagnification of approximately 0.5 in a horizontal plane and 0.5 cosine 35° in a vertical plane. An optical system of this type was designed and used by the writer at Trinity College, Dublin with some success but the arrangement of the contact lens devised by FENDER (fig. 2) makes this complication unnecessary. Using a mirror with its plane perpendicular to the optic axis of the eye, the demagnification required is nearly the same in the two planes. It is only necessary to adjust the inclination of the screen a little to secure accurate stabilisation in both planes simultaneously.

The accuracy of measurement is shown by a section of a record obtained by FENDER (fig. 4). The sharpness on the trace is such that an angular rotation of 10 seconds of arc can be detected. Using a drum camera paper speed of 3.7 cm per second it is possible to

record a tremor whose speed is approximately 100 c.p.s. It is possible to stabilise sufficiently accurately to secure that the angular movement of the image with respect to the eye is much less than 1 % of the movement of the eye itself. If the eye were a solid optical system whose parts had an invariable relation to one another and if there were no accommodation this would mean that the stabilised image remained stationary upon the retina within 1 or 2 μ , that is to say within a distance which is small compared with the spacing between cones even where they are packed most closely. It is unlikely that changes in the shape of the eyeball (*e. g.*, in response to pulse movements) are sufficiently large or sufficiently rapid to interfere with the stabilisation in respect of tremor or flicks. A change in accommodation is the only likely source of trouble, for the visual axis is about 5° from the optic axis in a horizontal plane and a movement of the back nodal point of the eye by 0.02 mm will move the image 2 μ (an intercone distance) horizontally across the retina. Interference with stabilisation by this effect is minimised by using horizontal patterns. The fact that there are gross differences between vision with the stabilised and the unstabilised image shows that some degree of effective stabilisation is obtained. It is however desirable to repeat the experiments with observers who have little accommodation either from age or through the use of cyclopegics. This work is in progress

3. **Records of eye-movements.** — A typical record of eye-movements obtained by FENDER is shown in figure 4. The movements deduced from the records may be summarised as follows :

(a) Tremor of frequency 30-80 c.p.s. The amplitude of this tremor is 5-15 seconds of arc for the H and V rotation and up to 45 seconds of arc for the T rotation.

(b) Flicks occurring irregularly at intervals va-

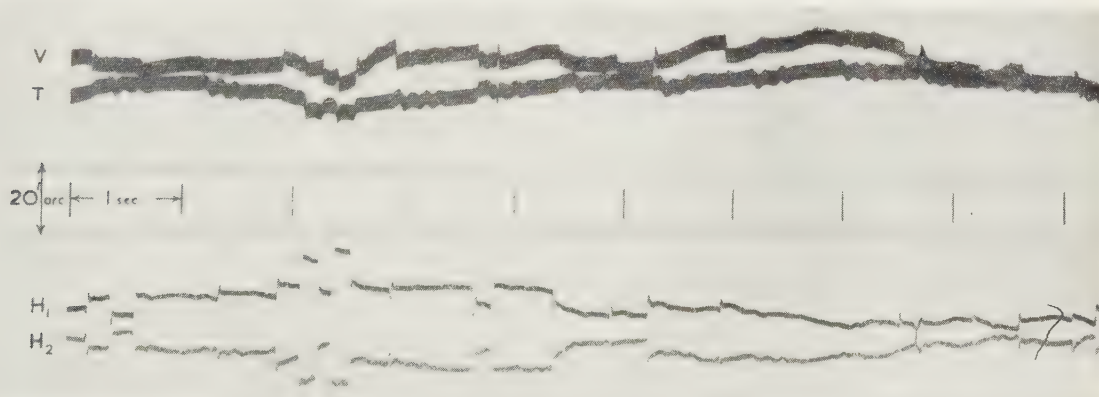


FIG. 4. — Record of Eye-movements (obtained by FENDER).
 H_1 and H_2 : horizontal movements (H_2 is reversed).
 V and T : vertical and torsional movements.
 Time interval marks 1 sec. Most records are taken at higher speeds.

rying from 0.03 second to 5.0 seconds. The amplitude of flicks for the H and V rotations ranges from 1 to 20 minutes of arc. For the T rotations the flicks are very small, usually about 2 minutes of arc.

(c) Slow drifts of up to 5 minutes of arc (for each rotation) occurring in the inter-flick periods.

It will be noticed that the torsional motion (T) of the eye ball is of the same nature as the other motions and differs only in magnitude. The torsional movements observed are very much greater than the « normal torsion » predicted by LISTING'S Law. The torsional movements are, however, too small to be of significance in relation to the theoretical discussion at the conclusion of this paper. They are being reported in detail in a paper by FENDER [5] and will therefore not be further discussed in this paper.

The maximum angular velocity during the tremor movements is about 20 minutes of arc per second. The angular velocity during the flick is of order 600 minutes of arc per second. The angular velocity during the drift movement is very small, being of order 1 minute of arc per second, but the total movement during a drift period is of the same order of magnitude as the movement during a flick because whereas the flick lasts a few hundredths of a second the mean time for a drift period is of order one second.

4. Movements of the image on the retina. — We have so far considered the movements in terms of angular rotations of the eye. Let us now consider the

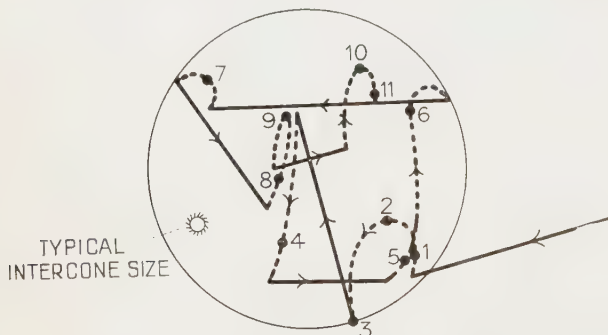


FIG. 5. — Movement of the image of a point object on the retina. The large circle is of radius 25μ (5 min. arc). --- represents slow drifts, — represents rapid flicks. Numbered dots indicate order in which movements are made and are spaced at equal time intervals of 200 m sec. On this particular occasion the whole movement is within a 25μ radius circle but longer period records reveal movements within a circle of radius 50μ .

movements of a small point on the image across the retina. The excursion due to the tremor corresponds to a movement of between 1 and 3μ on the retina. This is about the same as the inter-cone distance in the centre of the retina. The total effect of the drifts and flicks operating together is to make the image of a point object wander around a small region whose diameter is about 100μ in the centre of the retina, *i. e.*, somewhat smaller than the central territory defined

by POLYAK [9]. Detailed analysis (DITCHBURN and GINSBORG [4]), shows that the drifts are random motions but that the flicks are corrective. That is to say when the image approaches the edge of this central region there is a tendency for a flick to occur towards the centre. Figure 5 shows the representation of a series of drifts and flicks expressed in terms of movements on the retina.

5. Relations of the movements to visual signals. —

It is possible to record the movements of both eyes simultaneously by additions to the apparatus shown in figures 1 and 2. A typical pair of 8 horizontal rotations are shown in figure 6. The drift and flick

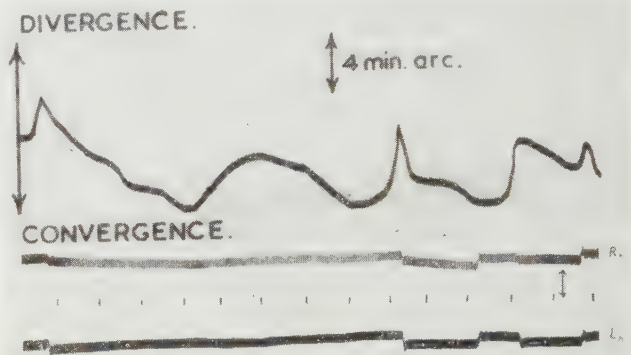


FIG. 6. — Binocular Horizontal Movements. R_h : right eye; L_h : Left eye. Time interval marks 0.2 sec. Vertical arrow represents 4 minutes of arc in upper part and 20 minutes of arc in lower part of figure. The relative motion of the two eyes is shown on a larger vertical scale in the upper part of the figure.

movements occur in opposing directions in the two eyes so as to produce convergence/divergence waves as shown in the figure, even though the subject is gazing as steadily as possible at a point where distance is fixed. These may be related to the accommodation changes reported by ARNULF *et al.* [1].

In some experiments the whole of the corneal portion of one of the contact lenses was covered with an opaque film of rhodium and the movements of both eyes were recorded. The records show no significant difference from those obtained with binocular fixation. In some other experiments the fixation spot was extinguished after the apparatus had been aligned. The records obtained in these experiments show the three characteristic types of movement but the flicks and drifts are very much larger. The subject seemed slowly to lose the direction of fixation. In one further series of experiments the subject viewed a stabilised retinal image and it was found that his eye movements were then quite normal.

The first of the three sets of experiments mentioned in the preceding paragraph shows that the binocular fixation is not corrected by signals depending upon

disparity of the images received by the two eyes. The second shows that even in the absence of any visual signals a moderately good fixation is maintained for a short period, and that all the fixation movements still exist. The third shows that when the target spot is fixed independent of the movement of the eye the general fixation mechanism still operates. Taking these three results together we conclude that the maintenance of fixation depends not upon visual signals only but upon signals received from the proprioceptor muscles or on some signal which is not derived from the retina.

The following experiment appears to show that the eye is unable to see anything during the flick periods. The light reflected from the mirror on the contact lens is allowed to fall upon the edge of a photo-cell so that the movements cause signals to appear in the cell. The output is fed through a high pass filter into an amplifier whose response is poor at low frequencies. The output from the amplifier is displayed on a cathode ray oscillograph and the beam is displaced only when a flick occurs since the signals received from the drifting movements are of too low frequency to be amplified, and those received from the tremor are too weak to be noticed. It is found that the pips created by the flick movements of the eye are not seen by the subject although a second observer seated beside the subject is able to see them clearly. It appears at first that this effect may be due simply to the fact that the eye is moving so quickly during the flick that no one retinal receptor receives enough illumination to stimulate it. This is not so. The moving spot on the cathode ray oscillograph forms an image on the retina of the second observer. The rate of motion of this image is fast compared with the motion created by the flick of the eye and the second observer sees it. It therefore appears that some secondary mechanism is required to explain the inhibition of vision during the flick.

6. Vision with the stabilised image. — Figure 3 shows one type of object which has been used for observation with the stabilising system. A field of approximately 1° is divided horizontally, the lower half being 40 % as bright as the upper. It is found that initially the subject can see the line of division clearly but that after about 5 seconds the line of division vanishes and the whole field appears to be uniformly illuminated. This state persists for a short period and then suddenly normal vision is restored. After another short interval the line of division again vanishes, and so on. A second type of object has recently been studied by FENDER. It consists of a black bar of visual length 2° and visual width 8 minutes set on a light ground. It is found that after a short time the black area appears to be invaded from the edges by patches of light and is finally completely obliterated so that the whole field appears uniformly illuminated although no light is reaching a certain region of the retina. RATLIFF, RIGGS and co-workers [11]

have made a detailed study of the effect of stabilisation on the ease with which a black wire on a bright ground can be seen. They find that, with the stabilised image, the black line target is clearly seen when it first appears, but the line begins to fade out and finally disappears altogether. A wider line took longer to disappear and often reappeared from time to time during one minute of steady fixation. With an unstabilised image the fading did occur for fine lines but seldom for heavier lines. They modified the optical system so as to increase the rate of movement of the image across the retina instead of decreasing it and they found that under these conditions there was scarcely any disappearance of even very fine lines. Other experiments showed that the increased movements may be disadvantageous when flash exposures are used. A few experiments have been made with coloured patches of light. The results obtained with different subjects are not entirely in agreement. There appears a general tendency for colours to appear much desaturated.

7. Discussion. — The experiments so far reported show that involuntary eye-movements are of importance in relation to visual perception. They are not sufficiently extensive to enable us to deduce any detailed theory of how the eye-movements are effective. The following discussion of eye-movements in relation to electrophysiological experiments on the eye is offered as a working hypothesis, useful for planning future experiments.

It is known that visual signals from the retinal receptors reach the brain by means of electrical impulses transmitted along fibres of the optic nerve. HARTLINE [7] succeeded in picking up impulses from individual nerve fibres in the eye of the frog and he examined the effects of different conditions of illumination on these impulses. He distinguished three different types of nerve fibre. One gave a burst of impulses in rapid succession when the eye was suddenly illuminated and also a large burst when the illumination was removed. This type gave a slow succession of impulses in response to steady illumination. The second type of receptor gave responses only when the illumination started and ended. The third responded only when it was switched off. He also showed that strong bursts of impulses could be produced when a small spot of light was moved across the part of the retina which included the receptor attached to the nerve fibre under observation. Later work (summarised by GRANIT [6]) shows that, in general, the behaviour of the receptor and nerve-fibre system is more complicated than that found by HARTLINE. It appears, however, to be generally true that there is a weak response to steady illumination and a strong response to changes of illumination. Various types of indirect evidence make it probable that this last statement is true for the human eye, though the details of HARTLINE's results cannot be assumed to be applicable to the human eye.

The human eye gives some response to a steady uniform illumination received, for example, through the closed lids, but its ability to perceive *slow* changes in this illumination is weak. The perception of this illumination is presumably due to a slow succession of discharges as mentioned above. We may now consider the perception of an element of pattern. Suppose for simplicity that the field of view is divided into two areas, one dark and one light. If there were no eye-movements, weak signals would be received from the illuminated area and very weak signals (possibly « noise ») from the unilluminated area. The effect of the tremor is that a set of receptors near the boundary between the light and dark area are continually being strongly stimulated because for them the illumination is being changed about 80 times a second. They therefore send very strong bursts of impulses along the corresponding nerves and continually convey to the brain strong signals which generate the perception of the boundary line. If the tremor were the only movement, then when the subject fixated steadily in a given direction the same set of nerve fibres would be continuously under strong stimulation in this way, and it appears probable that they would accommodate and their effectiveness would fall. The effect of the drift is to carry the boundary, in a time of the order of one or two seconds, to a new set of receptors. The strong stimulation now comes from a new set of receptors whose nerve fibres have not accommodated. Since the movement is very slow the brain interprets the signals in terms of a steady pattern and the subject does not see a movement in the visual field. If this process were to go on too long the point of interest would drift out of the centre of the retina where the cones are mostly closely packed and where the visual acuity is highest. Therefore there must be a restorative mechanism to bring the point of interest back somewhere near the centre of the retina. This restorative mechanism is to be found in the flicks. It is, however, necessary to arrange that the subject does not see the pattern flicking every time this restorative mechanism comes into operation. There is therefore some inhibition imposed so that no vision is obtained during the flicks.

When the test object is illuminated for a short period, the on and off impulses are generated all over the illuminated region and they cause signals which lead to perception of pattern even when there are no eye-movements. For very short flashes it is an advantage to have the retinal image stationary during the flash, partly because this makes it possible to ensure that the critical part of the target always falls on the best part of the retina. For longer exposures the tremor produces extra on off impulses from the receptors on the edge of a dividing line in the pattern. These are additional to the on impulses received at the beginning and the off impulses received at the end of a flash and they assist the perception of fine detail. Thus the eye-movements become an advantage when the length of flash exceeds a time which is comparable

with the length of the initial burst of impulses given when the stimulus is switched on. HARTLINE [7] found that the burst of impulses given when the light is switched on lasted about 0.1 second. RIGGS *et al.* [11] find that the stationary image is best for exposures of 0.034 sec. and 0.11 sec. but rapidly becomes less good for exposures of 0.21 sec. The « exaggerated movement » condition is considerably the best for exposures of 0.47 sec. This is as we should expect if the above theory of the effect of eye-movements is correct.

The hypotheses put forward account for most of the observed results. It should however be pointed out that although it is proved that eye-movements affect visual perception, it is not proved that each of the three types of movement described in section 3, is effective. The tremor is of very much higher frequency than the flicker fusion frequency and may be totally ineffective. It may be an unavoidable « noise » effect due to temporary fatigue in groups of nerve fibres forming parts of the opposed muscles which hold the fixated eye on the target. Detailed experiments in which the different movements can be restored separately are in progress.

The above discussion of the effect of eye-movements is probably over-simplified even in relation to the central part of the retina where it is believed that individual nerve fibres correspond to single receptors. We need to allow for the fact that the brain in some way « fills in » a region such as the blind spot from which it receives no signals whatever, and for a variety of similar effects. In peripheral parts of the retina, the inter-connections of the receptors with the ganglion cells undoubtedly play an important part but consideration of these is not within the scope of the present paper.

Acknowledgements. — I wish to thank the COUNCIL OF READING UNIVERSITY for a special grant in support of this research. I also wish to thank Mr D. H. FENDER (who is carrying out the experimental work on this subject at Reading) for help in the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1] ARNULF, A., DUPUY, O. and FLAMANT, F., *C. R. Acad. Sci.*, **2.2**, 1951, p. 438.
- [2] BARLOW, H. B., *J. Physiol.*, **116**, 1952, p. 290.
- [3] DITCHBURN, R. W., and GINSBORG, B. L., *Nature*, **170**, 1952, p. 36.
- [4] DITCHBURN, R. W., and GINSBORG, B. L., *J. Physiol.*, **119**, 1953, p. 1.
- [5] FENDER, D. H., *Brit. J. Ophthal.*, **39**, 1955, p. 65.
- [6] GRANIT, R., *Sensory Mechanisms of the Retina*, 1947, London, O. U. P.
- [7] HARTLINE, H. K., *J. O. S. A.*, **30**, 1940, p. 239.
- [8] LORD, M. P. and WRIGHT, W. D., *Rep. Prog. Phys.*, **13**, 1950, p. 1.
- [9] POLYAK, *The Retina*, (University of Chicago Press, 1941).
- [10] RATLIFF, F., *J. Exptl. Psych.*, **43**, 1952, p. 163.
- [11] RIGGS, L. A., RATLIFF, F., CORNSWEET, J. C., and CORNSWEET, T. N., *J. O. S. A.*, **43**, 1953, p. 495.
- [12] RIGGS, L. A., ARMINGTON, J. C. and RATLIFF, F., *J. O. S. A.*, **44**, 1954, p. 315.

Manuscript reçu le 25 octobre 1954.

On foveal and peripheral interaction in binocular vision

M. A. BOUMAN

Research Unit for Perception of the National Defense Research Council, The Netherlands

SUMMARY. — Contrast and increment thresholds were measured by the presentation of the test stimulus in one of the eyes, adapting fields of mutually different brightnesses and colours being incident in both eyes. No essential influence was found on threshold value under such stimulation of the non-measuring eye, the threshold being equal to the value appertaining to exclusive stimulation of the measuring eye. Periods of dominance of the various stimuli can under certain conditions easily be recognized. Measurements of increment thresholds under fluctuating illumination of the opposite eye at various moments during the light-dark cycle of such stimulation show a complex behaviour apparently due to a non-peripheral mechanism. Some suggestions are made as to a possible influence of attentional effects on such measurements.

SOMMAIRE. — Des mesures de contraste et d'augmentation du seuil ont été effectuées en appliquant des tests d'excitation à un seul œil, tandis que des champs d'adaptation de luminances et de couleurs différentes interviennent dans les deux yeux.

Cette excitation de l'œil inactif ne semble avoir aucune influence essentielle sur la valeur du seuil, qui reste égale à la valeur du seuil d'excitation de l'œil servant aux mesures.

On peut dans certains cas observer aisément des périodes où dominent certaines excitations (?).

Des mesures de l'augmentation du seuil sous l'influence d'un éclairage fluctuant sur l'œil inactif, à différents moments du cycle obscurité-clarté, montrent une complexité apparemment due à un mécanisme non périphérique.

Quelques suggestions sont faites sur l'influence probable de l'attention dans de telles mesures.

ZUSAMMENFASSUNG. — Während beiden Augen Felder von stetiger oder wechselnder Helligkeit und Farbe dargeboten werden, wird ein Prüfreiz nur einem Auge geboten und dabei Kontrast und Schwellwert gemessen. Es ergibt sich kein wesentlicher Einfluss auf den Schwellwert, wenn das andere Auge gereizt wird. Der Schwellwert hängt ausschliesslich von dem Reiz des gemessenen Auges ab. Perioden der Dominanz der verschiedenen Reize können unter gewissen Bedingungen leicht erkannt werden. Messungen der Schwellwerte während einer Flimmerreizung des anderen Auges zeigen ein sehr verwickeltes Verhalten. Die Möglichkeit von störenden Einflüssen auf solche Messungen werden diskutiert.

Introduction. — In the progress of a study of mutual interaction between different retinal areas the question arose whether such interaction occurs between the retinae of the two eyes. We had not in mind the self-evident merits of binocular vision like depth-perception by stereoscopic fusion or the enlargement of the visual field. We were interested in the possibility of affecting the visibility via the one eye by the stimulation of the opposite eye. Experiments by GRAHAM [1], CRAWFORD [2] and PIRENNE [3] on comparisons between monocular and binocular thresholds point to the independence of the perceptions by the two eyes. Their results point to the conclusion that binocular thresholds are only smaller by the improved chance of detection when two independent instruments are used instead of only one. Their studies refer to experiments in which both eyes are stimulated under identical conditions on corresponding parts of the retinae by equal test stimuli. In these conditions they found neither in the periphery nor for central vision any mutual summation or inhibition for threshold measurements. Because of some aspects of more or less everyday practice one is inclined to accept this conclusion also for cases in which stimulating conditions of the two eyes are different. For instance, trained subjects can easily use a monocular microscope without closing the non-observing eye. Efficiency and accuracy of their observations seem not to be affected by the arbitrary stimulation of this eye. GRAHAM [1], CRAWFORD [2] and PIRENNE's [3] conclusion is not corroborated by the experiments of

BARTLETT and GAGNÉ [4], COOK [5], CROZIER and HOLSWAY [6], SHAAD [7] and COLLIER [8]. All the latter authors claim that summation effects occur between the two eyes.

There are studies [9] about the resulting subjective brightness impression when the intensities of the stimulations of the eyes differ. It was found that the binocular brightness appearance under these conditions is intermediate between those for each eye separately, but does not equal the appearance of the arithmetic average of intensities applied to only one eye.

Some investigators [19] have reported on the possibility of colour mixture by binocular vision. Under certain conditions this is possible in the binocular field; for instance, a red impression in the one eye and a green in the other eye result in neutral or yellow. Evidently under these conditions interaction in binocular perception is more than a simple combination of the perceptions of either eye, but such interaction is restricted to the subjective appearance as to brightness and colour. We investigated whether or not it can be stated that threshold conditions for perception in the one eye are unaffected by any kind of stimulation of the opposite eye. As far as we know no complete check is reported in the literature. There are only a few incomplete studies [2, 11, 12, 13] available on the subject.

The experiments and their results. — Threshold problems refer to the detection of differences in brightness or colour by simultaneous comparison of test stimuli in different parts of the visual field or by

(*) Kampweg 3, Soesterberg.

successive comparison of stimuli at the same location. The first are referred to as contrast thresholds, the second are indicated as decrement or increment thresholds. We had at our disposal an experimental arrangement in which two concentric circular stimuli for each eye were available. Wavelengths, intensities, diameter and times of presentation could be varied independently for each of the four stimuli. We used spectral bands, 100 Å in width around 5 000 Å and 6 500 Å, foveal and 7° eccentric fixation. The arrangement was recently described in detail [12]. Artificial pupils 2 mm in diameter were used. Peripheral fixation of the eyes was realized with two small fixation lights, one for each eye separately. For foveal fixation, patterns of four lights were used situated on the corners of a square about 2° in size. A systematic report of the various cases studied by us is presented in what follows.

I. Contrast thresholds. — In the observer's right eye a red or green adapting field 10° in diameter was projected. A red or green test stimulus, for foveal vision 75 minutes of arc and for peripheral vision 5° in diameter, was added to the adapting field. Consequently eight combinations of colours for adapting field and test stimulus and centre of presentation were studied. For a few intensities of the field the intensity of the test flash required for just noticeability was determined. Provisions were made for a suitable time of adaptation to the actual conditions in order to obtain stable results. Afterwards experiments were made when a red or green field 10° in diameter was projected on the corresponding part of the opposite eye. One striking point which impresses the observer when making these experiments has to be mentioned in order to evaluate the results correctly. Especially when brightness of the field in the one eye becomes more dazzling than the field in the opposite eye (for instance ten times as high) and colours of the fields are different, a fluctuating phenomenon can be observed. This phenomenon is related to the subjective appearance in the visual field in which also the mutual movements of the axes of the eyes interfere. Because of the equal size of the fields (10° in diameter) in both eyes and the projection of these fields on corresponding parts of the retina — when the eyes are adequately fixated — they could be fused, but the observer never succeeded in having the fields continuously fused for any considerable time. The observer was conscious of intermittently discrete and different subjective appearances. Periods proved to be highly dependent on brightness values and colours, on central or peripheral fixation and on the attitude, attention and training of the observer.

After simple introspection the following general analysis of the appearances can be given :

Case 1. Conscious perception is exclusively due to the stimulation of one of the eyes. Whether the optical axes of the eyes are or are not in proper position for projection of the fields on corresponding parts of the retinae

can evidently not be recognized by the observer. The possibility of such dominance of one of the stimulations can easily be demonstrated by presenting different objects in the visual fields of each eye separately. Sometimes only the one or only the other object is seen.

Case 2. Conscious perception is evidently due to the combination of stimulations of both eyes when the absence of proper positioning of the axes for projection of the fields on corresponding parts of the retinae can be recognized by the observer.

Case 3. Conscious perception must be due to the combined stimulation of both eyes when cases 1 and 2 do not occur. The appearance is not equal to what the observer knows to be due to the exclusive stimulation of the one or the other eye separately, only in the case of sufficient difference between the aspects of these exclusive stimulations. Otherwise the observer cannot without further aids recognize whether a dominance as mentioned under case 1 occurs or whether case 3 is realized.

For example in one of our experimental conditions the following appearances alternated. When a red field in the one and a green field in the opposite eye was used, both fields 10° in diameter, only a red or only a green field was perceived when case 1 was active ; a decentred mutual position of a red and green field of equal size was recognized when case 2 was realized, in the overlapping part some yellowish colour dependent on the brightness values of the two fields being apparent ; during the remaining time one circular field yellowish in colour was perceived (case 3).

From our experiments we derive this conclusion : when contrast threshold conditions are fulfilled in the one eye, the test stimulus becomes intermittently invisible under stimulation of the opposite eye. Periods of invisibility seem only to occur when the latter stimulation is completely dominant as described under case 1. We checked the latter point by the introduction of the possibility for the observer to distinguish whether the measuring (right) eye was active or not. This was done by making the size of the adapting field in this eye smaller than the diameter of the field in the other eye. It was found that when these fields were 10 and 8° in diameter the test stimulus — being just or far above threshold under exclusive stimulation of the right (measuring) eye — was only actually invisible when the larger field in the left eye was exclusively perceived. As soon as the adapting field in the measuring eye interfered in the perception, the visibility of the target was recognized, regardless of colours, brightnesses and location on the retinae of fields and test stimulus.

In table I some of the results are presented in terms of the ratio between threshold energies of the test stimulus with and without the field in the opposite eye. The mean deviation in the settings of the threshold brightness was about 25 percent for our

TABLE I. — Contrast thresholds in the right eye for a steady red or green adapting field, 8° in diameter and a red or green steady test stimulus · 5° in diameter for peripheral and 1·15' for foveal vision. Red or green field, 10° in diameter in the left eye. Each threshold value obtained by averaging of 10 settings of each observer. The ratio is the average of the values for two observers.

Field right	Field left	Ratio contrast thresholds right eye without and with left field			
		peripheral		foveal	
		red	green	red	green
—	red : 42 mla	1.1	0.83	1.12	1.03
	0.20 mla	0.95	0.97	0.94	1.00
red : 16 mla	42 mla	1.08	1.07	1.03	0.98
0.11 mla	42 mla	1.03	1.12	0.93	1.05
16 mla	0.20 mla	1.00	1.02	1.16	0.98
0.11 mla	0.20 mla	0.91	1.00	1.02	0.91
green : 29 mla	42 mla	1.00	0.98	0.98	0.95
1.4 mla	42 mla	0.93	0.93	1.12	1.00
29 mla	0.20 mla	1.00	1.02	0.87	1.08
1.4 mla	0.20 mla	1.16	0.99	1.10	1.16
—	green : 87 mla	1.02	1.05	1.01	1.12
	0.87 mla	1.00	1.09	0.97	0.99
29 mla	87 mla	1.10	0.98	0.89	1.01
1.4 mla	87 mla	0.98	1.01	1.09	0.98
29 mla	0.87 mla	0.90	1.23	1.02	1.02
1.4 mla	0.87 mla	1.22	0.89	0.98	0.93
16 mla	87 mla	1.00	0.98	1.07	0.91
0.11 mla	87 mla	0.99	0.91	1.00	0.97
16 mla	0.87 mla	1.01	0.97	0.91	0.89
0.11 mla	0.87 mla	1.01	0.94	1.08	0.95

observers and almost independent of experimental conditions. The results only refer to the periods in which the non-measuring eye is not exclusively dominant. When such a distinction on the various aspects of the conscious perception was not made or could not be made by suitable geometrical mutual proportions of the stimuli, a highly irreproducible effect was introduced in the measurements. This effect originates from the possibility of a breakdown of an actual dominance of the non-measuring eye by a sufficiently large increase in brightness of the test stimulus and the subsequent visibility of the target. This high brightness of the test stimulus should be interpreted as a threshold measurement. The brightness for which such a breakdown could be realized was far from stable and could fluctuate over several log units. Also mutual movements of the axes of the eyes and other factors influenced the periods of dominance. Our conclusion does not hold for one evidently very special condition, namely, when stimulation in the non-measuring eye subtends exactly the corresponding area of the test stimulus in the right eye. This case was tested by making the field in the non-measuring eye 5° in diameter for peripheral measurements and 75 minutes of arc in the fovea, equal to the corresponding sizes of the test stimulus. Now when contrast threshold conditions were fulfilled in the right eye, the presence of the test stimulus could intermittently be detected under stimulation of the other eye. It occurred only when absence of proper positions of the axes of the eyes for fusion was recognized by the observer. Indeed when with proper position of the axes the cir-

cular adapting field 10° in diameter and one target 5° or 75 minutes in diameter centrally located on it, was perceived consciously, decision by the observer as to the origin of the central target was impossible. This situation could arise from a simple combination in the binocular field of adapting stimulus in the right eye and the field in the other eye, or from an active fusion of test stimulus with the latter field, or from complete dominance of the perception in the right eye. The only available clue for the detection of the presence of the test stimulus is to investigate whether a shift in colour or a change in brightness of the central part occurs when the test stimulus is presented intermittently to the observer. In practice, because of impossibility of a steady fixation of both axes, the coincident projections of test stimulus in the right eye and the field in the other eye will frequently break down and the test stimulus is subsequently detected merely by fulfilling threshold conditions necessary for the exclusive stimulation of the right eye. Of course the possible occurrence of this complicating factor of equal size of the test stimulus and of the field in the other eye is also more or less important when sizes are slightly different. Because of the impossibility of adequate fixation of the eye, it was not possible to make quantitative measurements when difference in size was varied.

II. Increment thresholds. — a) Under steady illumination of the opposite eye.

Again in the observer's right eye a red or green adapting field was projected. A red or green test flash lasting 0.01 second, for foveal vision 75 minutes of arc and for peripheral vision 5° in diameter, was added to the adapting field. Intensities of the test flash required for threshold visibility were determined. These thresholds were in terms of intensities for which the chance of observation was 60 percent. They were obtained by interpolation between measurements of frequencies of seeing neighbouring on the 60 percent value, each chance being determined by 20-50 repetitions of the test flash. Afterwards these measurements were repeated when a red or green adapting field 8° in diameter was projected on the corresponding part of the opposite retina. Of course, the fluctuating phenomenon as to the appearance of the conscious perception of the steadily illuminated fields in the two eyes was again observed. However, when measurements were only made in periods of non-dominance of the non-measuring eye, again no influence on threshold values was found whatever the colours, brightnesses and location on the retinae of fields and test stimulus. The results in table II only refer to these periods. Periods for measuring were again made distinguishable for the observer by using fields of different size, 8° in diameter in the right eye and 10° in the left. The brightness of the test flash required for a breakdown of dominance of the non-measuring left eye and subsequent visibility of the flash was now more or less reproducible and not very far above the value found for the other periods. The difference increased with increasing

brightness of the field in the left eye, resulting in a rise up to 2-4 times as high when compared with the threshold values in the other periods. Relatively, accuracy was still poor. The average deviation was about 150 percent for our observers in the dominance-periods of the left eye and about 25 percent for the other periods. We again met the special condition when the field in the left eye and the area of the flash were coincident. This case was tested with a circular field 5° in diameter for peripheral vision and 75 minutes of arc in the fovea similar to the area of the flash in the measuring right eye, the adapting field in this eye being 10° in diameter. Proper position of the axes of the eyes for projection of the flash exactly on the corresponding field of the left eye can easily be recognized by the observer by concentric position of the fields, but is hard to obtain, as such a coincidence must be obtained synchronously with the presentation of the flash. The actual measurements were very difficult because of these complicating factors. The results pointed to the conclusion that the facts are as before: for non-dominance of the left eye the flashes are detected when threshold conditions for exclusive stimulation of the right eye are fulfilled; breakdown of dominance can arise from flashes not more than 4 times as bright as the threshold value.

b) Under fluctuating illumination of the non-measuring eye.

In the previous section on contrast thresholds it was noticed that the procedure for threshold-measurements breaks down when geometrical conditions of the steady test stimulus are exactly copied on the corresponding area of the opposite retina by a steady suprathreshold stimulation. Consequently conditions as to geometry and time-distribution of these two stimuli were identical.

In line with this situation is — when applied to increment thresholds — the presentation of an abrupt suprathreshold change in brightness in the visual field of the left eye synchronously with the testflash on exactly the corresponding area of the right retina. When these conditions are fulfilled the observer cannot decide the origin of the change in apparent brightness in this part of the visual field. Of course, the possible occurrence of this condition is also more or less important when synchronism and identity in stimulated area of the retinae are not completely realized. We designed a set of experiments to study these special conditions in further detail. In the left eye a field 10° in diameter was presented intermittently, 1.5 second light 2.5 seconds dark. Red and green light was used. Experiments were made for central and foveal presentation. In the opposite eye a test flash was presented, lasting 0.03 second, at various moments of the light-dark cycle in the left eye. For the flash also red and green light was used. The flashes used in the experiments were 5° and 10° in diameter. The position of the flash — when adequate fixation was realized — was concentric with the field in the left eye. Intensity of the field was varied. In figure 1 we present a result

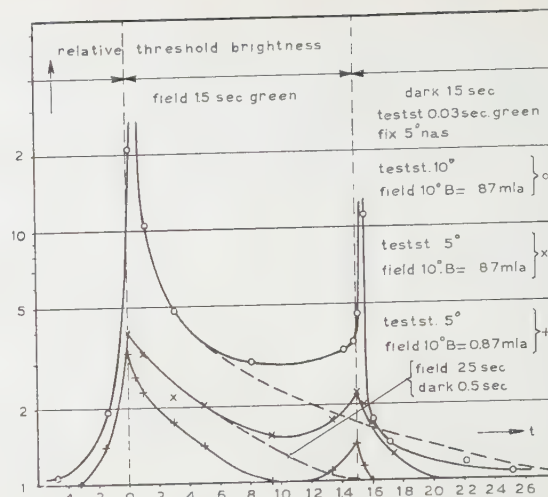


FIG. 1. — Relative threshold brightness for green flashes, lasting 0.03 second, 5° or 10° in size, measured peripherally 5° nasal in the one eye at various moments of the light-dark cycle in the other eye, which was stimulated intermittently by a green adapting field, 10° in diameter, on the corresponding part of the retina, brightness 0.87 and 87 mLa.

typical for all conditions of centre of fixation and colours of the stimuli. The full curves are rather arbitrary and just an aid for easy inspection of the behaviour. The dotted curves only symbolize that if the initiation of the field stimulus should not be followed by an interruption, the threshold value would decrease to the original value appertaining to non-stimulation or steady illumination of the left eye (table II).

TABLE II. — Increment thresholds in the right eye for a steady red or green adapting field 8° in diameter and a red or green testflash 5° in diameter for peripheral and $15'$ for foveal vision. Red or green field 10° in diameter in the left eye.

Each threshold value obtained by averaging of 10 settings of each observer. The ratio is the average of the values for two observers.

Field right	Field left	Ratio contrast thresholds right eye without and with left field			
		peripheral		foveal	
		red	green	red	green
—	red : 42 mla	0.88	0.83	1.12	1.16
—	0.20 mla	0.93	0.97	0.97	0.97
red : 16 mla	42 mla	1.12	1.09	1.16	0.95
0.11 mla	42 mla	1.01	1.00	1.01	1.02
16 mla	0.20 mla	1.02	1.01	1.09	0.91
0.11 mla	0.20 mla	0.98	1.08	1.00	0.87
green : 29 mla	42 mla	0.91	0.95	1.12	0.93
1.4 mla	42 mla	1.02	0.98	1.01	0.91
29 mla	0.20 mla	0.89	0.98	0.97	1.09
1.4 mla	0.20 mla	0.98	1.03	0.95	0.98
—	87 mla	1.05	1.02	0.95	1.16
—	0.87 mla	1.16	0.89	1.12	0.91
29 mla	87 mla	1.12	0.97	1.29	1.03
1.4 mla	87 mla	1.01	0.94	1.10	0.87
29 mla	0.87 mla	1.02	0.90	0.76	1.16
1.4 mla	0.87 mla	0.97	1.09	0.83	0.98
16 mla	87 mla	1.02	1.00	1.07	0.89
0.11 mla	87 mla	0.87	0.91	1.08	0.99
16 mla	0.87 mla	0.93	1.12	1.02	0.93
0.11 mla	0.87 mla	1.00	1.19	0.99	1.08

The interruption in the full-drawn curves at their highest values symbolizes the impossibility of measuring threshold values if proper position of the eyes could always be realized ideally and simultaneously with both test flash and intermissions or initiations of the field stimulus. The results point to the following conclusion: a sudden decrease or increase of brightness in the one eye affects the threshold measured on the corresponding part of the opposite retina when the test stimulus is flashing more or less simultaneously with such increase or decrease. It seems that sensitivity is decreased for some time around the moment at which brightness is changed.

Some of the other results are presented in the figures 2.

In the experiments previously reported on contrast and increment thresholds no adaptive effect was found for steady illumination. Only a rivalling phenomenon in dominance, an attention factor, between the various separate stimuli was apparent. No doubt such a phenomenon does not originate from a retinal mechanism.

Evidently the results described in this section also cannot originate from such a peripheral mechanism. Under the conditions of these experiments with fluctuating illumination of the left eye, the observer feels completely hypnotized by the events in the visual field. One is inclined to believe that a highly stable direction is given to various possible dominant factors, which would otherwise fluctuate at random, by the periodically intermittent illumination of both eyes. When periods of light or dark extend to more than about 3 seconds, at the end of such longer periods random fluctuation of such factors is again apparent. The data of the figures should show test stimulus-brightnesses for which, in the direction of possible dominant factors, conscious perception of the test-flash is involved.

It is far beyond our scope to present a critical expert discussion of such considerations. However, some of the remarks we made might be excused because of the highly interesting subjective appearances due to the dominances of the various factors we met when making our experiments.

In order to present matters in their simplest way we did not mention the difficulties in finding a suitable geometrical arrangement in the visual field for fixation aids and sizes of the fields in both eyes. In our first experiments we paid regard to the periods of dominance for the various conditions and consequently the necessity for the observer to distinguish between the periods in order to obtain a clear insight into the fluctuating visibility of the fields and the testflash. The final sizes and fixation aids mentioned were more or less suitable after a sufficiently long training period for detection of dominance periods when possible at all.

At first all experiments were made when the test stimulus was presented to the right eye. In the progress of the study the two observers acquired under these conditions a rather good ability in detection and analysis of the fluctuating phenomena as regards dominances. The period of investigation covered about

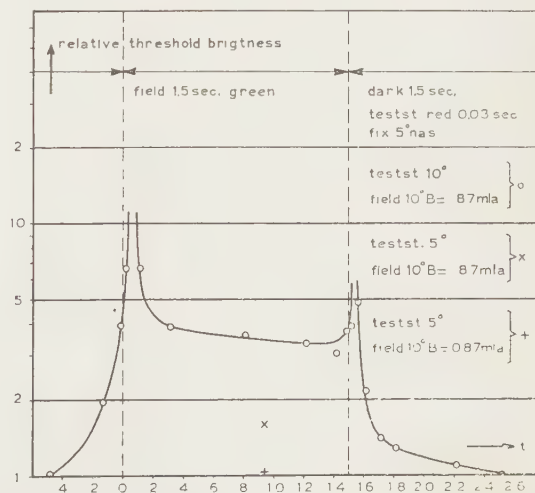
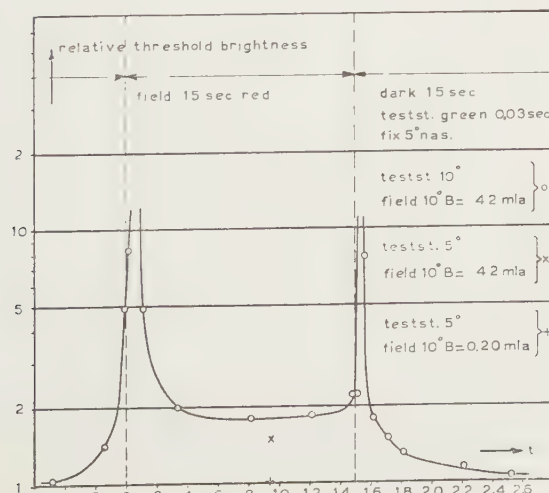
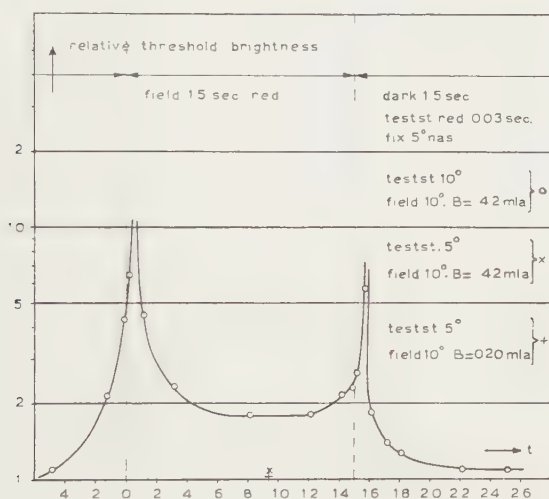


FIG. 2. — Similar data for other experimental conditions.

three months, at the end of which the tasks of right and left eye in the experiments were reversed. After a few sessions, at which the observers were more or less puzzled in making decisions on possible dominances, they recovered their good ability for such distinctions, the reported results on visibility of the test stimulus being still valid.

Discussion. — In the introduction to this paper we mentioned reports [1-10] on binocular and monocular thresholds. The findings with respect to the occurrence of binocular summation have not been unequivocal, positive and negative results having been found with about equal frequency. Such contradictory results are also found for other aspects of binocular interaction, such as the influence on the state of adaptation in the one eye by the stimulation of the opposite eye. CRAWFORD [2], IVÁNOFF [11], BOUMAN [12] and MANDELBAUM [13] reported the absence of an adaptive effect.

ELSBERG and SPOTNITZ [14] claim that such an effect should exist. If so, the visibility of a target via the one eye would also in all cases be affected by simultaneous stimulation of the other eye. In preliminary experiments BOUMAN [12] and MUELLER [15] found an inhibitory effect for higher brightness values of the adapting field. In the study of this present paper it was found that this inhibition does not appertain to certain periods in fluctuation of various possible dominant factors.

Probably such effects also interfered in the other contradictory results just mentioned and in the impossibility of binocular mixture of red and green to form yellow reported by HELMHOLTZ [16]. Others, however, have found that this mixture can easily be obtained.

Recent experiments of VERPLANCK, COLLIER and COTTON [17] have shown that successive responses to a repeated, invariant simple binocular visual stimulus are not independent. The probability of a «yes» (or a «no») response to any trial is associated with the responses to preceeding trials resulting in runs of «yes» or «no» responses. COLLIER [8] found evidence for a non-peripheral origin of this intertrial associative effect. The features of this effect are similar to the dominance-periods distinguished by our observers in the experiments reported here.

With regard to our results reported in the section on increment-thresholds for fluctuating illumination of the non-measuring eye, a few other studies should be mentioned. They refer to measurements of intensity-discrimination during the presentation of an adapting stimulus and at specified times following and preceding its onset and cessation all in the same eye. The experimental conditions are very similar to ours except that monocular vision is concerned. The typical result as to relative behaviour of ΔI is also similar to the data in figure 1. Primarily these effects were explored by CRAWFORD [18]. Subsequent investigations were made by BAKER [19] and BOYNTON and TRIEDMAN [20]. The latter included measurements of the b-wave

in the electroretinogram. The similarity in amplitude of the b-wave as a function of dark-adapting interval and the finding by HARTLINE and McDONALD [21] of a similar effect in the single optic nerve fibre of the horseshoe crab, led to suggestions as to a retinal mechanism for a thresholdrise just before cessation or initiation of the adapting fields and a subsequent drop into the dark — or light — adapting curve. The conclusiveness of the arguments for such a suggestion is destroyed by the results reported in this paper.

The following remark may be worth noting. The threshold value ΔI when measured monocularly or binocularly under normal conditions is evaluated by the observer as a just distinguishable brightness difference. From our measurements, when steady stimulating conditions of both eyes are different, it can be proved that the amount of energy supplied to one eye in order to detect a difference in brightness does not depend on the apparent brightness [4] in the binocular field. The required energy is still equal to the threshold value of the eye when this eye is exclusively stimulated.

In our investigation we were not concerned with pure colour contrast with elimination of brightness differences. Under all conditions a red or green test stimulus was added to a red or green adapting field in the eyes.

We are indebted to Mr P. ROEST for valuable assistance in the experiments and for his willingness to be an observer.

RÉFÉRENCES

- [1] C. H. GRAHAM, An investigation of binocular summation: I. The Fovea. II. The Periphery. *J. gen. Psychology*, **3**, 1930, p. 494; *J. gen. Psychology*, **5**, 1931, p. 311.
- [2] B. CRAWFORD, Ocular interaction in its relation to measurements of brightness threshold. *Proc. Phys. Soc. B.*, **128**, 1940, p. 552.
- [3] M. H. PIRENNE, Binocular and unocular threshold of vision. *Nature*, **152**, 1943, p. 698.
- [4] N. R. BARTLETT & R. M. GAGNÉ, On binocular summation at threshold. *J. exp. Psychol.*, **25**, 1939, p. 91-99.
- [5] T. W. COOK, Binocular and monocular relations in foveal dark adaptation. *Psychol. Monogr.*, **45**, p. 3, 1934 (Whole no. 202).
- [6] W. J. CROZIER & A. H. WOLWAY, Theory and measurement of visual mechanisms. I. A visual discriminometer. II. Threshold stimulus intensity and retinal position. *J. gen. Physiol.*, **22**, 1938-39, p. 341-364.
W. J. CROZIER & A. H. WOLWAY, Theory and measurement of visual mechanisms. III. ΔI as a function of area, intensity and wave length, for monocular and binocular stimulation. *J. gen. Physiol.*, **23**, 1939, p. 101-141.
- [7] D. SHAAD, Binocular summation in scotopic vision. *J. exp. Psychol.*, **18**, 1935, p. 391-413.
- [8] G. COLLIER, Probability of response and intertrial associations as functions of monocular and binocular stimulation. *J. exp. Psych.*, **47**, 1954, p. 47.
- [9] H. R. DE SILVA and S. H. BARTLEY, Summation and subtraction of brightness in binocular perception. *Brit. J. of Psych.*, **20**, 1930, p. 241.
- [10] S. HECHT, On the binocular fusion of colours and its relation to theories of colour vision. *Prov. Nat. Ac. Sc.*, **14**, 1928, p. 237.

- [11] A. IVANOFF, Contribution à l'étude de la composante inhibitive de l'éblouissement. *Rev. Opt.*, **26**, 1947, p. 479.
- [12] M. A. BOUMAN, Peripheral contrast thresholds for various and different Wavelengths for adapting field and teststimulus. *J. opt. Soc. Am.*, **42**, 1952, p. 820.
- [13] J. MANDELBAUM, Dark adaptation ; some physiological and clinical considerations. *Arch. Ophthalm.*, **26**, 1941, p. 203.
- [14] C. A. ELSBERG & H. SPOTNITZ, Relation of stimulation time of receptors to recovery time in the nervous system: visual olfactory and auditory senses. *J. Neurophysiol.*, **2**, 1939, p. 227.
- [15] C. J. MUELLER, Personal communication.
- [16] H. HELMHOLTZ, *Physiological Optics*, **3**, 1925, p. 505.
- [17] W. S. VERPLANCK, G. H. COLLIER & J. W. COTTON, Nonindependence of successive responses in measurements of the visual threshold. *J. exp. Psychol.*, **44**, 1952, p. 273.
- W. S. VERPLANCK, J. W. COTTON & G. H. COLLIER, Previous training as a determinant of response dependency at the threshold. *J. exp. Psychol.*, **46**, 1953, p. 10.
- [18] B. H. CRAWFORD, Visual adaptation to brief conditioning stimuli. *Proc. Roy. Soc. B.*, **134**, 1947, p. 283.
- [19] H. DE H. BAKER, The course of foveal light adaptation as measured by the intensity threshold increment. *J. opt. Soc. Am.*, **39**, 1949, p. 174.
- [20] R. M. BOYNTON & M. H. TRIEDMAN, A psychophysical and electrophysiological study of light adaptation. *J. of exp. Psych.*, **46**, 2, 1953, p. 125-135.
- [21] H. K. HARTLINE and P. R. MAC DONALD, Light and dark adaptation of single photoreceptor elements in the eye of limulus. *J. cell. and comp. Physiol.*, **30**, 1947, p. 225-254.

Manuscrit reçu le 28 septembre 1954.

The bleaching and regeneration of rhodopsin in the living eye of the albino rabbit and of man (*)

by W. A. H. RUSHTON, F. W. CAMPBELL, W. A. HAGINS AND G. S. BRINDLEY

from The Physiological Laboratory, Cambridge

SUMMARY. — 1. Two instruments are described by which the rhodopsin level can be measured in the living eye of the albino rabbit and of man.

- 2. The time course of bleaching and regeneration is plotted both for rabbit (fig. 4 & 5) and man (fig. 7 & 9).
- 3. The substance bleached in the rabbit has a difference spectrum similar to that of rhodopsin (fig. 3).
- 4. The substance bleached in man has a retinal distribution similar to that of rod density (fig. 8).
- 5. There seems little justification for using scotopic sensitivity as a measure of rhodopsin density.

SOMMAIRE. — 1. Description de deux instruments permettant d'étudier la transformation de la rhodopsine dans l'œil vivant du lapin albinos et de l'homme.

- 2. La durée de la décomposition et de la régénération est représentée sur des graphiques, pour le lapin (fig. 4 et 5) et pour l'homme (fig. 7 et 9).
- 3. La substance décomposée, chez le lapin, présente une différence spectrale analogue à celle de la rhodopsine (fig. 3).
- 4. La substance décomposée, chez l'homme, présente une distribution rétinienne analogue à celle de la densité des bâtonnets (fig. 8).
- 5. Il semble peu justifiable d'utiliser la sensibilité scotopique comme mesure de la densité de la rhodopsine.

ZUSAMMENFASSUNG. — 1. Es werden zwei Instrumente beschrieben, mit denen der Rhodopsin-Spiegel im lebenden Auge des Albino-Kaninchen und des Menschen gemessen werden kann.

- 2. Der zeitliche Ablauf des Ausbleichens und der Regeneration ist für das Kaninchen in den Abbildungen 4 und 5 und für den Menschen in den Abbildungen 7 und 9 dargestellt.
- 3. Die gebleichte Substanz beim Kaninchenauge hat ein Absorptionsspektrum ähnlich dem des Rhodopsins.
- 4. Die gebleichte Substanz ist beim Menschen in der Netzhaut ähnlich verteilt wie die Dichte der Stäbchen.
- 5. Es scheint nur wenig berechtigt die Dunkelempfindlichkeit als Mass für den Rhodopsingehalt zu benutzen.

Introduction

The importance of rhodopsin in the visual mechanism has been recognised ever since its discovery by BOLL [5], and a great deal of our present knowledge about bleaching and regeneration was already established by KÜHNE [16, 17] in the retinas of frogs and many other animals. Rhodopsin was seen to be contained in the outer segments of the rods of dark adapted retinas and never seen anywhere else in nature. It was therefore believed to be associated with rod vision. Meanwhile SCHULTZ, v. KRIES and PARINAUD firmly laid the foundations for the Duplicity Theory. From the comparative anatomy of the retinas of day and night animals, and the regional anatomy of the human retina it was established that cones cannot

opérate in very dim light ; for in these circumstances only rods possess the requisite sensitivity. The conclusion followed that rhodopsin is the photo-pigment of twilight vision.

If that were true the spectral sensitivity for twilight vision (the scotopic visibility curve) should be the same as the absorption spectrum of rhodopsin or as its action spectrum (i. e. the efficacy of bleaching). Comparisons of these spectral curves (LYTHGOE [18], WALD [28], CHASE & HAIG [8], SCHNEIDER, GOODEVE & LYTHGOE [26], WALD [29], CRAWFORD [9]), have shown an almost embarrassing agreement so, that there can be very little doubt that the first step in the scotopic vision of man and other mammals is the absorption of light by rhodopsin.

Since the rhodopsin of the rods will bleach in strong light and will regenerate in the dark, it might be expected that after light adaptation, the visual threshold

(*) Paper presented in part to Florence Meeting on Problems in Contemporary Optics (10-10 September, 1954).

would rise as a result of the smaller fraction of the incident light effectively absorbed. The enormous changes of sensitivity which occur in light and dark adaptation have often been explained in terms of this possible mechanism, despite the rather improbable quantities involved. But although the scotopic threshold (or its logarithm!) has frequently been used as a direct measure of the quantity of rhodopsin present in the human eye, very little attempt has been made to justify this far-reaching assumption, and where investigation has been made, the results have not been reassuring.

GRANIT *et al* [13, 14] measured the scotopic sensitivity of an animal (frog, cat) by the electroretinogram and found that after light adaptation the size of the electric wave, so far from going hand in hand with rhodopsin regeneration, did not begin to increase until the pigment had regenerated to 50 % of its full dark adapted value. BAUMGARDT [4] calculated that at moderate illuminations which produce a considerable sensitivity change, extremely little rhodopsin can be broken down.

RUSHTON & COHEN [23] verified this directly by using the relation that the *percentage* of rhodopsin bleached by a given exposure is independent of the actual rhodopsin density (assumed small). If the retinal illumination is known in scotopic units, the percentage bleaching may be calculated from DARTNALL, GOODEVE & LYTHGOE's [10] results upon the bleaching rate of frog's rhodopsin. Alternatively a rhodopsin solution may be substituted for the human eye, and the percentage bleached in the exposure directly measured, with appropriate geometrical corrections. Both these estimates were in fact made (only the first was published) and agreed in showing that the brief illumination used could not at most have bleached more than 2 % of the retinal rhodopsin. But instead of the threshold changing 2 % it changed at least 20 times. Since the test light was 3' in diameter and lasted 7 msec, changes in summation area or summation time could not contribute in any simple fashion to this result. WALD immediately repeated this experiment [30] with essentially the same result.

In order, however, to have clear knowledge as to how visual function is related to the density of retinal rhodopsin we need really to be able to measure this directly. Nearly the only method employed has been to kill the animal, dissect out the retina in red or dim yellow light, and estimate in some way the rhodopsin present. KÜHNE simply observed the colour quickly in diffuse daylight, FRIDERICIA & HOLM [12] compared the excised retinas with GARTEN's colour charts, TANSLEY [27] extracted the rhodopsin into a clear solution of digitonin and measured the density photographically, and ZEVI [32] and PESKIN [20] used photocells to measure their solutions. There are great disadvantages to this type of investigation. An animal can only supply a single measurement (or at most one measurement from each eye), and a whole series of such measurements is necessary before the

results can be related to visual function. It is very hard moreover to obtain a set of comparable animals comparably dissected and extracted in the very poor lighting conditions which are essential to avoid post-mortem bleaching. The prohibitive care and labour required to follow the rhodopsin levels through any simple manoeuvre in light and darkness is reflected in the fact that only one relation appears ever to have been attempted, namely, the regeneration of rhodopsin in the dark after more or less complete bleaching.

A method which allowed rhodopsin (or porphyropsin) to be observed in the living eye was used by ABELSDORFF [1, 2]. He looked through an ophthalmoscope into the eyes of crocodiles and certain fish which have a white tapetum and observed a purple pigment which could be bleached locally by a strong light focussed on a limited area. He made no attempt at quantitative measurement in these animals, and he considered the method impracticable with mammals. But BRINDLEY & WILLMER [6] applied this principle with partial success in man. They divided a monochromatic beam so that part filled the pupil and part traversed a comparison pathway including a photometric wedge. The light returning after reflexion at the *fundus oculi* matched with the comparison beam (reflected at a roof-prism) and the appropriate wedge setting read for various wave lengths of light.

In order to make a match it was necessary to use a light so strong that the rhodopsin was rapidly bleached, thus their actual measures are not very reliable. But one of us was encouraged by this work to build the retinal densitometer [21] which he had earlier designed, and this has proved a useful instrument with which to follow the rhodopsin level in the living eye of the albino rabbit in various conditions of illumination.

Part I: MEASUREMENTS IN THE RABBIT

The Retinal Densitometer

(a) *Principle*: In principle the rhodopsin was measured by the ophthalmoscopic method of ABELSDORFF, and of BRINDLEY & WILLMER. The light was shone into the eye, and the fraction reflected back was determined. Changes in rhodopsin density must produce a small change in the back-reflected fraction of the light, and the problem was to eliminate all the other factors which might disturb the determination of this fraction. Since the light used for measuring must not rapidly bleach the rhodopsin being measured, the signal is necessarily small and the back-reflected light must not be wasted. On the other hand not all this light comes from the retina, and corneal and other unwanted reflexions must be removed as far as possible.

It is not easy to hold the intensity of a light exactly constant nor the amplified output of a photocell quite steady over the space of several hours, so it is impor-

tant that small fluctuations in these quantities should not be interpreted as changes in the density of rhodopsin. The densitometer designed to satisfy as far as possible these requirements is shown in figure 1.

(b) *Optics* : The light source, S, was a 6 V, 36 W tungsten car headlight bulb run from a 6 V car battery (simultaneously charged from a rectifier). The light was collimated by the lens L_1 , passed through a "monochromatic" interference filter F, and fell upon the plate G_1 at the polarising angle. The reflected ray, which was completely plane-polarized, was focussed by L_2 through an artificial pupil upon the cornea, and illuminated a circular patch of retina. Some of the back-reflected light is transmitted

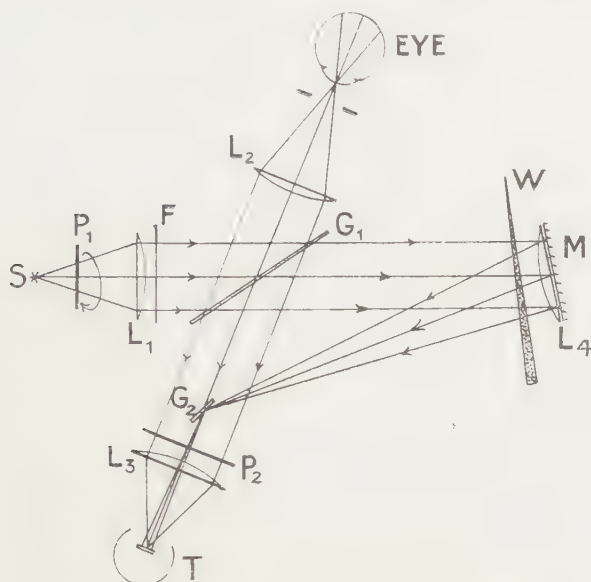


FIG. 1. — The retinal densitometer : optical arrangement.

through the glass plate G_1 , and is focussed by L_3 upon the cathode of a photomultiplier Tube T. Now most of the unwanted light is reflected from the cornea and L_2 and hence is plane-polarized, so it may be removed by introducing a polaroid P_2 suitably orientated. The light scattered back from behind the retina, on the other hand, is depolarized, and so half of it is in the sense to pass P_2 ; to this half the glass G_1 is perfectly transparent.

In order to make the necessary measurement independent of drifts in the intensity of light source or of photocell amplification, comparison is made with a second light beam which, passing through G_1 , is reflected at the mirror M, and glass plate G_2 (upon which it is focussed by L_4) and so into the photocell. A convenient way of making the comparison is to place a rotating polaroid P_1 , in front of the light source S. If P_1 is slowly rotated, a position (zero) will be found where no light is reflected from G_1 into the eye. At an angle θ from that position the light reflected into the eye will be proportional to $\sin^2 \theta$. Thus the light received by the photocell will be $\sin^2 \theta$

from the eye together with the contribution from the comparison path. This latter will be the component of the light through P_1 which is in the plane admitted by P_2 , and will have the value $b \cos^2 \theta$, where the value b will naturally depend upon the position of the wedge W. The total light received by the photocell will thus be

$$I = a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta$$

and by moving the wedge so that a and b are equal we get

$$I = a (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \equiv a$$

and is independent of the position θ .

The output of the photocell is condenser-coupled to an oscilloscope, and, as the polaroid P_1 rotates at some 40 rev/sec, an 80 cycle A. C. is in general seen on the screen. By moving the wedge, the amplitude of the sine wave may be brought to zero and in this case

$$a = b.$$

Any change in the rhodopsin density of the eye will change a and upset the balance. This is restored by an equal change in b . Since the light passes twice through the retina and twice through the wedge, the change in rhodopsin density is measured directly by the change in wedge density.

It will be clear that though the balance is sensitive to changes in a it is not affected by a change in the intensity of the light source or the gain of the phototube, for though the photo-electric output depends upon these things, it is not the output that is measured, but simply the wedge setting required for the output to have zero A. C. component; and the fact that we are concerned only with 80 cycles A. C. avoids all difficulties with D. C. stability.

(c) *Signal "Noise"* : If bright light can be used, it is easy to set the wedge to give zero amplitude to

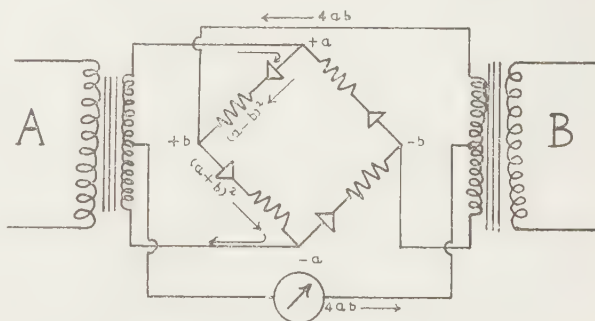


FIG. 2. — Phase-sensitive rectifier bridge for integrating the product of two inputs A, B.

the A. C. signal. But with weak lights and large amplification of signal it was difficult to set the zero accurately in the presence of the inevitable "noise". A very great improvement was achieved through the use of the elegant arrangement indicated in figure 2 for which we are indebted to Mr M. RYLE, F. R. S., of Trinity College, Cambridge.

B is the amplified output from the phototube T . A is a large sine wave input in phase with the signal to the eye, obtained by deflecting a portion of the beam into a second photomultiplier tube. The A. C. components of both inputs are transformer-coupled to the rectifier bridge.

In each arm of the bridge the current is roughly proportional to the square of the voltage difference, and the total effect is that the signals A and B are multiplied together and the galvanometer integrates the result.

Suppose the signal A is $a \sin pt$, and B is $b \sin qt$, then as is well known

$$\int_0^{2\pi} a \sin pt. b \sin qt. dt = 0$$

for all values of p except the value $p = q$.

So the galvanometer integrates to zero all the Fourier components of the noise in the signal B except that small fraction which has both the same period as the incident sine wave and is more or less in phase with it.

By using this circuit, the retinal densitometer will measure changes of density correct to $0.002 \log_{10}$ unit. Each reading takes about 5 sec to perform, and the light employed causes a change of less than 0.0002 unit of rhodopsin density. Since the maximum density in an albino rabbit's eye lies between 0.1 and 0.15 the densitometer has a speed and accuracy adequate for many purposes.

The experiment

The first experiments were made by BRINDLEY and RUSHTON [22] and the work was developed by HAGINS and RUSHTON [15].

The experimental procedure in general is as follows. The rabbit is decerebrated under ether and left to recover from the anaesthetic, sufficient urethane being given to keep it quiet. The head is fixed, the pupil kept fully dilated, and when necessary the eyelids are held open by threads. Most rabbits have a very bad optical surface at the cornea, but with the aid of a contact glass, a reasonable image of the retina was formed in the neighbourhood of the glass plate G_1 , figure 1.

By viewing this it was thus possible to arrange that the region of retina investigated was that part, below the horizontal line of nerve fibres, which as KÜHNE observed is especially rich in rhodopsin.

It could also be verified that the eye was centred so that the iris was not visible through the artificial pupil and there were no serious stray reflexions.

The results

The details of our experiments with decerebrate rabbits and also with excised eyes mounted in a bath at various temperatures are appearing elsewhere. The

results now to be presented are some fresh observations from a single experiment designed to substantiate the claim that rhodopsin is in fact being measured, to illustrate the precision of the method and to display the course of bleaching and dark-regeneration.

The animal was first fully dark adapted. Then the density of the retina was measured in monochromatic light at 10 different wave lengths by interposing the interference filters in turn. Next a bright green light was shone into the eye and the density measured every 15 or 30 sec to give the time course of bleaching (fig. 4). The density was then measured again at various wave lengths, and finally the regeneration in the dark was followed (fig. 5).

The measurements clearly show that the optical density becomes less in strong light and increases

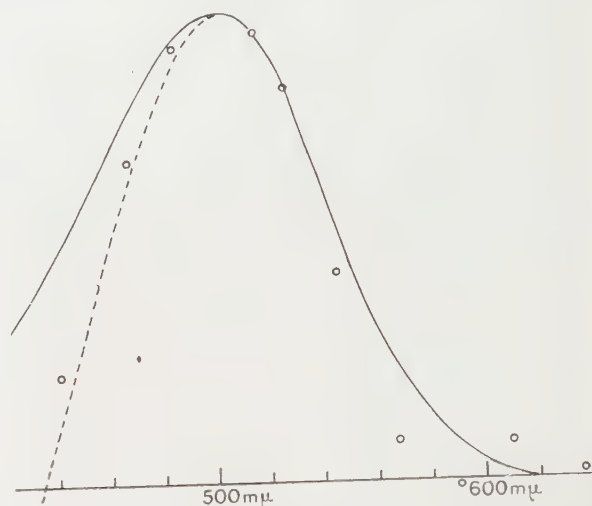


FIG. 3. — Full curve : absorption spectrum of rhodopsin. Broken curve : difference spectrum of rhodopsin at p_H 5.5. Circles : difference spectrum of retinal bleaching.

again in the dark. The important thing is to know what is the difference spectrum of the pigment (or whatever it is) which thus bleaches and regenerates. This spectrum may be found at once from the two sets of density measurements obtained before and after bleaching; for at each wave length the difference of the wedge settings must give the change in density of the pigment which was first present and subsequently bleached. In figure 3 the circles show these differences plotted against wavelength, and the full and broken curves are the well known absorption spectrum and difference spectrum of rhodopsin in solution (from WALD). Without entering into the finer points of comparison or making the corrections necessary for any exact analysis of the bleaching we may say that the circles fit the curve.

We thus conclude that it is rhodopsin that we measure because in the part of the rabbit's retina which Kühne found to be richest in rhodopsin there is a loss in the light and a slow return in the dark of some-

thing which has a difference spectrum similar to that of rhodopsin.

Figure 4 shows the time-course of bleaching with bright green light of wave length $517\text{ m}\mu$. The retinal illumination was about 4×10^{14} quanta $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$. It would be expected that the fall in density should at first be rapid and later slower, for, with an initial density of 0.12, about 25 % of the light incident upon the retina will be absorbed by rhodopsin, whereas later on, the retina will be nearly transparent. The points do not, however, fall upon the theoretical curve calculated from this simple consideration; after some minutes the density falls a good deal too slowly. This

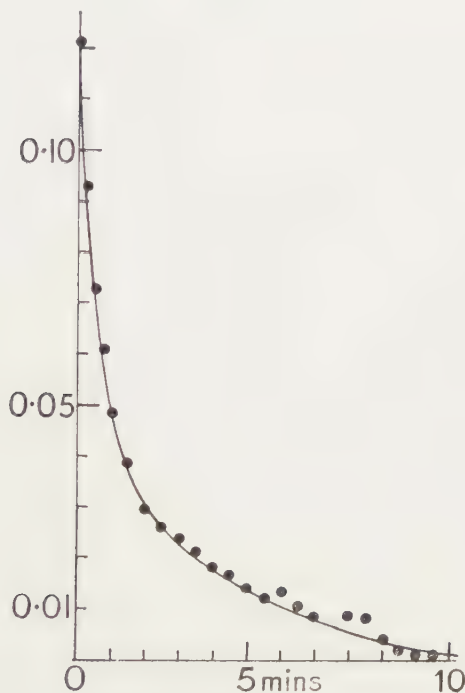


FIG. 4. — Time course of bleaching in the rabbit's eye. Ordinates : retinal density in excess of the fully bleached value. Curve drawn free-hand through points.

is presumably due to the accumulation of photoproducts and the onset of rhodopsin regeneration which only slowly reach equilibrium.

The course of regeneration in the dark is seen in figure 5. The measurements were made in rather weak light (10^{13} quanta $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$) of wave length $517\text{ m}\mu$ applied for about 5 sec every 5 min. After 90 min. when regeneration was complete, the measuring light was turned on and left on (at the point indicated by the arrow in figure 5). The subsequent curve shows the rate of bleaching produced from which it appears that each 5 sec measurement bleached less than 0.0002 density unit of rhodopsin.

The regeneration curve shows features which have already been reported (HAGINS & RUSHTON [15]). It takes some 80 min to reach completion and the first half proceeds at a uniform speed. This linear rise was

found by ZEWI [32] in the frog and by us and by WEALE [31] in the cat, but not by TANSLEY [27] in the rat, nor does it seem to occur in man, as will appear in Part 2 of this paper.

The density of rhodopsin is a great deal higher than might have been anticipated from a superficial consideration of the published measurements on extracted rhodopsin. The value in figure 5 is an extinction of 0.17 corresponding to 32 % absorption of the incident light. WALD's [28] figures for the rabbit, for instance, are 0.019 extinction and 4.2 % absorption. As he pointed out, the formal assumption of a uniform rhodopsin layer spread uniformly over the retina is bound to give a figure considerably lower than the actual density in the rods, and he estimated that the value should be doubled [28] or even multiplied by 5 [30].

That part of the discrepancy which is due to the reti-

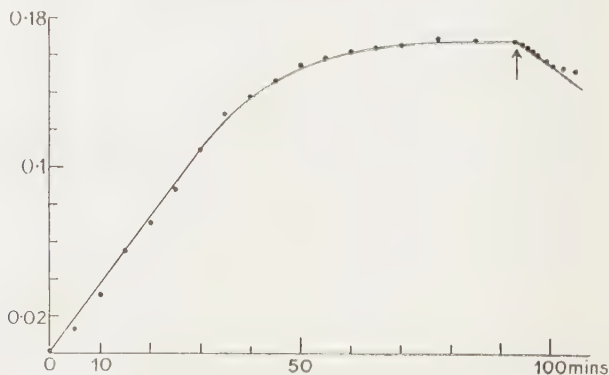


FIG. 5. — Time course of regeneration in the rabbit's eye. Ordinates : retinal density in excess of the fully bleached value. At the arrow the measuring light was left on instead of shining for only 5 sec once every 5 min.

nal area containing elements other than rods is likely to affect our measurements in much the same way as WALD's. The higher rhodopsin value we obtain is chiefly due to our selecting for measurement that particular region of the rabbit's retina where the density is exceptionally great. There is, in addition, the fact that the rhodopsin molecules in the rods are orientated perpendicular ly to the axis (SCHMIDT [25], DENTON [11]). This increases by 50 % the chance of their absorbing light passing axially down the rods, and hence rhodopsin density in the rods should be 1.5 time as great as that estimated directly from the random orientation in solutions.

Part II : MEASUREMENTS IN MAN

The Rhodopsinometer

The difficulties in applying the foregoing method to measurements in man result chiefly from the black pigment which everywhere lines the retina. On this account only a minute fraction of the blue-green mea-

suring light is reflected back, so that unwanted reflexions and scatter become very serious. Also when the eye is measured against a separate comparison beam, the smallest head and eye movements alter the readings.

It was therefore decided to compare the densities in orange and blue-green light sent in succession along the *same* optical path. This eliminates to a first order small eye movements but imposes a fixed wave length for the measuring light. The rhodopsinometer used is shown in figure 6.

A narrow beam of light (5°) is focussed onto the cornea through a hole in the silvering of a cover-slip, and the light reflected back from behind the retina passes out through the dilated pupil, is reflec-

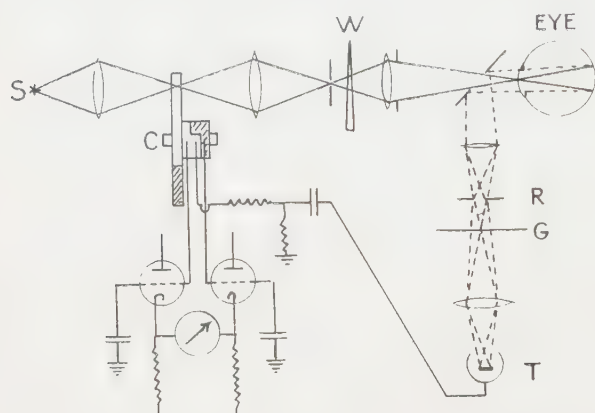


FIG. 6. — The rhodopsinometer: optical and electrical arrangement.

ted at the mirror and focussed upon the cathode of a photomultiplier tube T. R is a variable stop in the retinal image plane, adjusted to view only the centre of the illuminated patch of retina. In certain positions of the eye a corneal reflexion appeared. This came to a point focus in the plane of the glass plate G, and was stopped by a tiny piece of plasticene appropriately placed.

Now between the light source and the eye is placed a transparent wheel C one half of which is coloured blue-green and the other half orange, so when it rotates (at some 20 rev/sec) these two colours are alternately presented to the eye. In general the output from the photocell will be different for the two half-cycles, but this difference may be abolished by shifting the purple wedge W in the incident light beam, since this will strongly affect the blue-green transmission, but only slightly the orange. The signal-to-noise ratio is much improved by the commutator arrangement on the axis of the colour wheel which directs the green output into one integrating condenser and the orange into another. Equality is detected by the null reading of the galvanometer connecting the two cathode followers, and the wedge setting will be independent of small variations in the brightness of the light source, or amplification of the

photomultiplier. On the other hand any bleaching of rhodopsin will upset the balance and to restore it, as much "purple" must be added in the wedge as was lost in the rhodopsin. Change in retinal rhodopsin is thus directly measured by reading the change in position of the purple wedge.

The results

Two short notes of our results have already appeared (CAMPBELL & RUSHTON [7], RUSHTON & CAMPBELL [24]), and a more detailed analysis of the work will be published shortly. The results given

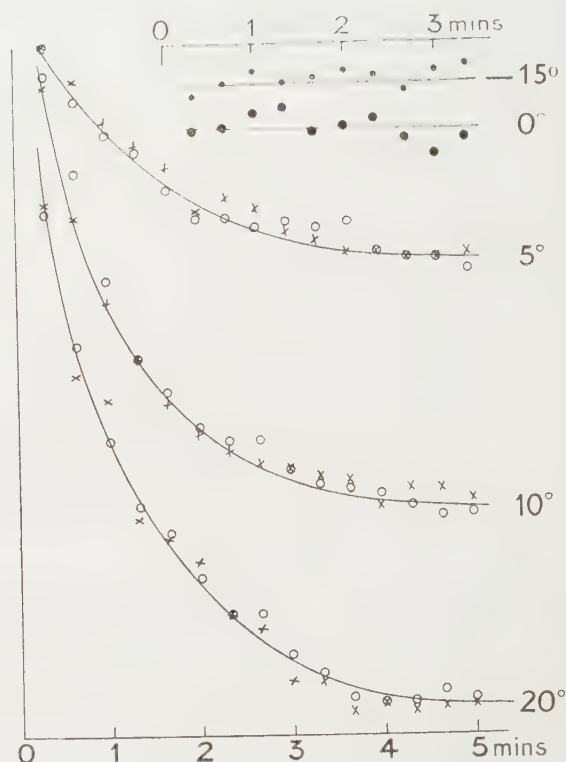


FIG. 7. — Time course of bleaching in man at 5 different retinal locations on the horizontal meridian. e. g. "20°" is 20° temporal to the fovea: "— 15°" is on the optic disc. Circles and crosses are two measurements repeated at 3 days interval. Ordinates: change of purple wedge setting.

here simply present the grounds for our belief that rhodopsin changes in the human eye can be measured by the rhodopsinometer with speed and accuracy.

Figure 7 shows the change which occurs when the dark adapted human eye is bleached. Measurements were made upon a small patch of retina 2° in diameter situated a distance temporal to the fovea which is indicated for each curve. The 20° curve for instance falls rapidly and exponentially in a fashion similar to rhodopsin bleaching in the rabbit (fig. 4). If this *does* represent rhodopsin bleaching in man we should expect none of it upon the fovea and optic disc where there is no rhodopsin. This is seen to be the case, for

the density at the fovea (0°) and the disc (-15°) does not change with "bleaching" (1).

Each region of the retina is seen to have a characteristic bleaching curve, and it is clear from figure 7 that the difference between the curves for 5° , 10° , 20° is far greater than between the circles and crosses on the same curve which represents a repetition of the measurements upon the same subject another day. A measure of the rhodopsin density of different regions of the retina is given by the total change in level of the curves of figure 7, the difference between the dark adapted and light adapted retinal density.

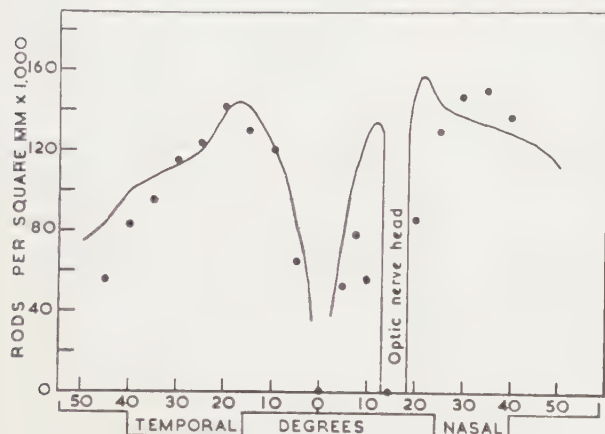


FIG. 8. — Black circles : measurements of rhodopsin density at the points shown along the horizontal meridian of the retina in man. Curve : ØSTERBERG's plot of rod density per mm^2 in the same region.

This measurement was made systematically for a number of 2° patches along the horizontal meridian from 45° temporal to 40° nasal, and the results are shown as dots in figure 8. The curve is ØSTERBERG's [19] histological determination of rod density over the same region of the human eye. There is clearly some correlation between rod density and what we claim is rhodopsin density.

Figure 9 shows the course of regeneration of rhodopsin in the dark together with an exponential curve of half-return period 7 min. Man thus differs in some respects from decerebrate and part-anaesthetized rabbits (fig. 5) and in others from normal rats (TANSELY [27]), but discussion at this stage would be premature.

We think that what we measure in the human eye is rhodopsin because

(a) it is measured by the instrument designed to measure rhodopsin ;

(b) it is bleached by light in a manner very similar to the way rhodopsin is bleached in the eye of the rabbit ;

(1) Note : the curves of figure 7 have been shifted vertically for clearness. Only the shape of each curve, not its vertical position is significant.

(c) it regenerates again slowly in the dark taking half-an hour to approach completion ;

(d) it is absent at the fovea and optic disc, and elsewhere in the retina the density follows more or less ØSTERBERG's plot of rod concentration.

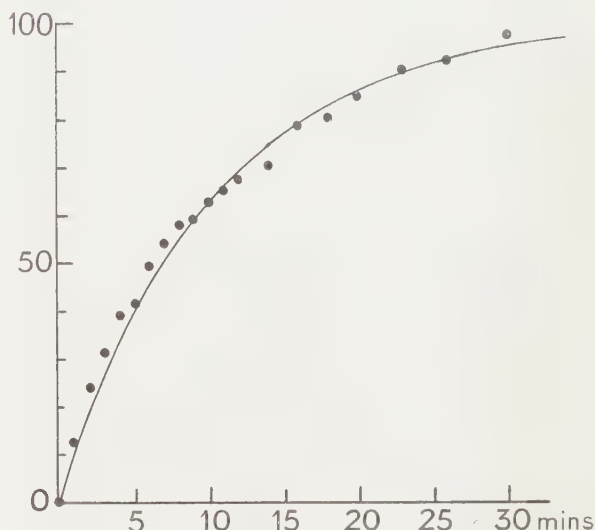


FIG. 9. — Black circles : time course of regeneration in man. Ordinates : percent fully regenerated. The curve is an exponential with half-return period of 7 min.

Discussion

The preliminary experiments here described throw some light upon the topic with which this paper opened, namely, the relation between rhodopsin density scotopic sensitivity.

Both in the rabbit and in man a bright light will bleach away rhodopsin, and a brighter light will do so faster. Regeneration follows in the dark. In one sense there seems a correlation between the return of rhodopsin and the return of sensitivity since in man both take 30-40 min to reach completion. In the rabbit, on the other hand, regeneration takes some 80 min (fig. 5) and it is much the same in the cat (RUSHTON & BRINDLEY, oral communication 1952). This again fits the return of sensitivity, for BARLOW, FITZHUGH & KUFFLER [3] have found 90 min to be period over which the cat's threshold in the dark continues to fall.

But though there seems to be some connexion between the recovery of sensitivity and the regeneration of rhodopsin it is certainly *not* due simply or significantly to the diminished quantum-catching power of partly bleached rhodopsin. At 7 min after intense bleaching half the rhodopsin has regenerated, thus the threshold should have fallen to twice the final dark adapted level if quantum absorption alone is concerned. But in fact at 7 min after intense light adaptation the rods, if functional at all, have a threshold many hundreds of times greater than the final value.

Clearly, between the catching of light quanta by

rhodopsin and the resulting modification of impulse rhythm in optic nerve fibres there is a complicated and highly non-linear mechanism whose properties alter profoundly during light and dark adaptation. It might be possible to show that these properties are uniquely determined by the instantaneous rhodopsin level, and in what way. If this were done there would be justification for using the scotopic threshold to measure rhodopsin concentration.

The expenses of these researches were assisted by grants from the Royal Society, the Medical Research Council and the Ross Foundation to whom it is a pleasure to express our gratitude.

We should also like to acknowledge our indebtedness to Mr CLIVE HOOD who has helped in the work and constructed much of the equipment.

REFERENCES

- [1] ABELSDORFF G. Z. *f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane*, **14**, 1897, p. 77.
- [2] ABELSDORFF G. *Arch. f. Anat. u. Physiol. (Physiol.)*, 1898, p. 155.
- [3] BARLOW H. B., FITZHUGH R. & KUFFLER S. W., *J. Physiol.*, **125**, 1954, p. 28 P.
- [4] BAUMGARDT E. *Rev. d'Opt.*, **28**, 1950, p. 661.
- [5] BOLL F. *Monatsber. Akad. Wiss. Berlin*, **41**, 1876, p. 783.
- [6] BRINDLEY G. S. & WILLMER E. N. *J. Physiol.*, **116**, 1952, p. 350.
- [7] CAMPBELL F. W. & RUSHTON W. A. H. *J. Physiol.*, **126**, 1954, p. 36 P.

- [8] CHASE A. M. & HAIG C. J. *Gen. Physiol.*, **21**, 1938, p. 411.
- [9] CRAWFORD B. H. *Proc. Phys. Soc. B.*, **62**, 1949, p. 321.
- [10] DARTNALL H. J. A., GOODEVE C. F. & LYTHERG R. J. *Proc. Roy. Soc. A.*, **156**, 1936, p. 158.
- [11] DENTON E. J. *J. Physiol.*, **124**, 1954, p. 16P, 17P.
- [12] FRIDERICIA L. S. & HOLME E. *Am. J. Physiol.*, **73**, 1925, p. 63.
- [13] GRANIT R., HOLMBERG T. & ZEVI M. *J. Physiol.*, **94**, 1938, p. 430.
- [14] GRANIT R., MUNSTERHJELM A. & ZEVI M. *J. Physiol.*, **96**, 1939, p. 31.
- [15] HAGINS W. A. & RUSHTON W. A. H. *J. Physiol.*, **120**, 1953, p. 61P.
- [16] KÜHNE W. *Unters. physiol. Inst. Heidelb.*, **1**, 1877-8, p. 15, p. 225, p. 341.
- [17] KÜHNE W. *Unters. physiol. Inst. Heidelb.*, **2**, 1878-82, p. 69, p. 89, p. 254.
- [18] LYTHERG R. J. *J. Physiol.*, **89**, 1937, p. 331.
- [19] ØSTERBERG G. *Acta Ophthalmologica Suppl.*, **6**, 1935.
- [20] PESKIN J. C. *J. Gen. Physiol.*, **26**, 1942, p. 27.
- [21] RUSHTON W. A. H., *J. Physiol.*, **117**, 1952, p. 47 P.
- [22] RUSHTON W. A. H. *Acta Physiol. Scand.*, **29**, 1953, p. 16.
- [23] RUSHTON W. A. H. & COHEN R. D. *Nature, Lond.*, **173**, 1954, p. 301.
- [24] RUSHTON W. A. H. & CAMPBELL F. W. *Nature, Lond.*, **174**, 1954, p. 1096.
- [25] SCHMIDT W. J. *Die Doppelbrechung von Karyoplasma, Zytoplasma und Metaplasma* (Berlin), 1937.
- [26] SCHNEIDER E. E., GOODEVE C. F. & LYTHERG R. J. *Proc. Roy. Soc. A.*, **170**, 1939, p. 102.
- [27] TANSLEY K. J. *Physiol.*, **71**, 1931, p. 442.
- [28] WALD G. *J. Gen. Physiol.*, **21**, 1938, p. 795.
- [29] WALD G. *Science*, **101**, 1945, p. 653.
- [30] WALD G. *Science*, **119**, 1954, p. 887.
- [31] WEALE R. A. *J. Physiol.*, **122**, 1953, p. 322.
- [32] ZEVI M. *Acta Soc. Sci. Fenn. N. S. B.*, **2**, 1939, N° 4, p. 1.

Manuscrit reçu le 5 novembre 1954.

Lettres à l'Éditeur

Physiologie de la télévision en couleurs *

Yves LE GRAND

Professeur au Muséum National d'Histoire Naturelle, Paris.

Le développement de la télévision pose de nombreux problèmes techniques, mais n'a pas jusqu'ici soulevé de questions nouvelles en optique physiologique. Les deux différences essentielles avec la projection cinématographique sont le découpage en lignes et la brève durée d'émission de chaque point (impulsion très courte suivie d'une trainée de phosphorescence) ; cela impose d'une part une distance minimum d'observation telle que la trame reste invisible, condition plus sévère qu'au cinéma où le diamètre de la tache élémentaire peut atteindre le double de la limite de résolution sans perte de netteté apparente ; quant à l'émission brève, elle se trouve intégrée par la rétine dont les temps élémentaires sont beaucoup plus longs.

Il semble donc au premier abord que la télévision en couleurs ne pose pas d'autres problèmes que ceux que le cinéma en couleurs a déjà résolus, mais c'est inexact pour deux raisons : d'abord la télévision peut

utiliser des procédés additifs tandis que le cinéma doit, pour des raisons pratiques, se contenter de procédés soustractifs ; ensuite l'information que peut transmettre un message télévisé est limitée par la largeur de bande autorisée et tout gain sur l'information colorée se paie par une perte d'information en détails ; il y a donc là un compromis à établir, sur lequel de nombreux techniciens ont déjà travaillé ; nous voudrions ici établir brièvement les bases théoriques de la question.

Désignons par l'unité la luminance maximum de l'écran pour le blanc, que nous supposons voisin de l'étalon C de la colorimétrie (6 740°K), parce que ce blanc constitue une « lumière du jour » raisonnable et que l'idéal de la télévision serait de transmettre sans altération les scènes d'extérieur. Admettons d'autre part les primaires instrumentales suivantes, très proches de celles que WINTRINGHAM [1] a réalisées

	R	G	B
Coordonnée x	0,680	0,230	0,145
— y	0,320	0,670	0,050

(*) Extrait de la communication présentée au Congrès international sur les problèmes d'optique moderne (Florence, 10-16 septembre 1954).

Un calcul ennuyeux et facile aboutit aux valeurs suivantes des luminances des primaires nécessaires pour réaliser une lumière donnée

$$\begin{aligned} Y_r &= 0,5538 X - 0,1769 Y - 0,0888 Z \\ Y_g &= -0,5590 X + 1,1879 Y + 0,0269 Z \\ Y_b &= 0,0052 X - 0,0110 Y + 0,0619 Z \end{aligned}$$

Par exemple pour réaliser le blanc C de luminance unité, soit

$$\begin{aligned} x &= 0,3101 \quad y = 0,3163 \\ X &= 0,980 \quad Y = 1 \quad Z = 1,181 \end{aligned}$$

il faut des luminances de primaires

$$Y_r = 0,261 \quad Y_g = 0,672 \quad Y_b = 0,067$$

Ce sont d'ailleurs les luminances maxima à réaliser pour les primaires, puisque toute surface colorée dérive du blanc par suppression de certaines radiations. On constate qu'il existe un rapport 10 entre les luminances maxima du vert et du bleu.

Un vieux préjugé en optique physiologique attribue au bleu une moins bonne acuité qu'aux autres couleurs, mais cela provient sans doute des faibles niveaux généralement utilisés dans le bleu, ainsi que de l'aberration chromatique de l'œil. Après correction de la myopie au bleu et si les niveaux sont maintenus égaux, les mesures conduisent à peu près aux mêmes acuités pour toutes les couleurs. Or, dans le spectacle télévisé, on regarde en général l'écran à distance assez faible, ce qui permet de négliger la myopie dans le bleu. D'autre part les mesures d'acuité en fonction du logarithme de la luminance conduisent à une courbe classique présentent une portion rectiligne centrale dont la pente est voisine de 0,5 (KÖNIG, LYTCHGOE, etc.) ; par conséquent si on admet que l'acuité 1 est obtenue pour une image en vert sur noir de luminance maximum, l'image en bleu sur noir de luminance 10 fois moindre pourra se contenter de l'acuité 0,5 ; ce rapport 2 des acuités me semble d'ailleurs un maximum, car l'augmentation de la luminance de l'écran conduira dans l'avenir à utiliser sans doute des portions moins inclinées de la courbe d'acuité.

Le cas d'images monochromes sur fond noir est évidemment exceptionnel ; un autre cas limite, peut-être plus proche de la réalité, serait celui d'une image de luminance constante où seule la chromaticité varierait ; on possède peu de données sur l'acuité purement chromatique ; une étude de MACADAM aux anneaux de LANDOLT [2] donnait des acuités moins bonnes qu'en blanc et noir ; BEDFORD [3] trouve que, pour

une acuité unité en blanc et noir, les acuités chromatiques seraient comprises entre 0,2 et 0,4, mais j'ai montré que ces résultats étaient critiquables [4]. Les résultats de BOUTRY et BILLARD [5] conduisent au contraire à des acuités du même ordre par variation de luminance ou variation de chromaticité, du moins aux forts niveaux.

Du point de vue théorique, il faut d'ailleurs remarquer que, dans le bleu, l'aberration chromatique de l'œil risque de transformer des variations de couleur en variations de luminance, par décalage du test ; pour éviter cet inconvénient, O'BRIEN et MILLER [6] ont imaginé de prendre comme test deux systèmes de franges d'interférences intercalés sur la rétine elle-même ; une technique moins compliquée serait l'emploi de la lumière dirigée, et des essais ont lieu actuellement par cette méthode (DURUP). En attendant des résultats encore incertains, le mieux serait probablement de supposer que l'acuité varie comme le nombre d'échelons différentiels chromatiques qui séparent les détails contigus ; en gros, j'ai montré [4] qu'il y avait deux fois moins d'échelons entre deux primaires qu'entre le blanc et le noir, au maximum de luminance. Il semble donc raisonnable, ici encore, d'admettre un rapport 2 des acuités nécessaires à la vision des détails achromatiques et à celle des détails purement chromatiques.

La conclusion de cette brève étude — qui, je le répète, est théorique et ne s'applique qu'aux conditions optima, toute considération technique étant volontairement négligée — est que l'image colorée demande certes une moindre finesse qu'en blanc et noir, mais que la variation est au maximum dans le rapport 2 ; bien qu'appréciable, ce facteur 2 ne correspond peut-être pas à l'espoir des techniciens de barrioler avec des teintes presque plates un dessin en blanc et noir ; l'œil est si content de voir de la couleur qu'une telle image serait sans doute acceptée, au début, avec plaisir, mais il ne faut pas invoquer l'optique physiologique pour tenter de justifier des compromis de commodité.

RÉFÉRENCES

- [1] W. T. WINTRINGHAM, *Proc. Inst. Radio. Eng.*, **39**, 1951, p. 1157.
- [2] D. MACADAM, *Nature*, **160**, 1947, p. 664.
- [3] A. V. BEDFORD, *Proc. Inst. Radio Eng.*, **38**, 1950, p. 1003.
- [4] Y. LE GRAND, *L'Onde électr.*, **31**, 1951, p. 173.
- [5] G. A. BOUTRY, *Opt. Acta*, **2**, 1955 (en préparation).
- [6] B. O'BRIEN & N. D. MILLER, *J. opt. Soc. Amer.*, **42**, 1952, p. 289.

Manuscrit reçu le 10 octobre 1954.

Au sujet de l'augmentation de la valeur de la myopie nocturne aux niveaux inférieurs à 10^{-3} cd/m² (*)

ALEXANDRE IVANOFF et M^{lle} CLOTILDE BOURDY

Nous avons laissé entendre dans un article précédent que le mécanisme de la myopie nocturne aux niveaux inférieurs à 10^{-3} cd/m² était peut-être lié à l'existence de la convergence binoculaire nocturne [1]. L'accommodation du cristallin observée dans l'obscurité totale par J. M. OTERO [2] se produirait en fait d'une façon progressive aux niveaux inférieurs à 10^{-3} cd/m², et serait liée à la convergence binoculaire nocturne.

Pour essayer de vérifier cette hypothèse, nous avons étudié la myopie nocturne de 7 sujets dont nous avons précédemment mesuré la convergence binoculaire. Le tableau ci-contre traduit les résultats que nous avons obtenus.

On voit qu'à 10^{-3} cd/m² la valeur de la myopie nocturne n'excède en aucun cas 0,85 δ, et par conséquent peut être expliquée uniquement par les aberrations chromatique et sphérique de l'œil, jointes respectivement à l'effet PURKINJE et à la dilatation de la pupille. Entre 10^{-3} cd/m² et $5 \cdot 10^{-5}$ cd/m², la valeur de la myopie nocturne n'augmente que de 0,25 δ ou moins pour les deux sujets dont la convergence binoculaire nocturne est faible, elle augmente de plus de 0,5 δ pour les quatre sujets dont la convergence binoculaire nocturne est de l'ordre de 2 δ, et enfin elle augmente de plus de 1 δ pour le sujet G. O., dont la convergence binoculaire nocturne est particulièrement forte. Ces résultats se trouvent donc en accord avec l'hypothèse d'une accommodation progressive du cristallin aux niveaux inférieurs en gros à 10^{-3} cd/m², accommodation qui serait étroitement liée à la convergence binoculaire se produisant aux mêmes niveaux.

Observateur	Valeur de la convergence limite dans l'obscurité (en dioptries)	Valeur de la myopie nocturne (en dioptries)		
		à 10^{-3} cd/m ²	à $5 \cdot 10^{-5}$ cd/m ²	variation entre 10^{-3} et $5 \cdot 10^{-5}$ cd/m ²
J. C.	0,05	0,25	0,50	0,25
A. I.	0,75	0,85	1,0	0,15
C. B.	1,65	0,55	1,45	0,90
R. C.	1,85	0,35	1,05	0,70
L. V.	1,95	0,60	1,20	0,60
M. A.	2,05	0,45	1,20 à 10^{-4} cd/m ²	0,75 entre 10^{-3} et 10^{-4} cd/m ²
G. O.	3,95	0,25	1,60	1,35

RÉFÉRENCES

(*) Extrait de la communication présentée au *Congrès international sur les problèmes d'optique moderne* (Florence, 10-16 septembre 1954).

- [1] A. IVANOFF, *Ann. Opt. oculaire*, **3**, 1954, p. 70.
[2] J. M. OTERO, *J. opt. Soc. Amer.*, **41**, 1951, 942.

Mesures photométriques visuelles sur un champ à gradient d'éclairement variable (*)

M^{lle} A. FIORENTINI, M^{lle} M. JEANNE et G. TORALDO DI FRANCA.

Istituto Nazionale di Ottica, Arcetri-Firenze

On a étudié un champ dont la luminance varie dans une direction : elle a une valeur constante L_1 jusqu'au point S_1 , descend linéairement jusqu'au point S_0 de luminance L_0 presque nulle, puis reste constante.

Avant toute mesure, on voit immédiatement une distribution d'éclairement complètement différente de celle que l'on attendait : deux lignes fines apparaissent, l'une brillante, à la limite entre la pénombre et le champ clair, l'autre noire, au bord de l'ombre. En outre, une grande partie de la pénombre semble très lumineuse, plus même que le champ éclairé.

(*) Cette recherche a été effectuée avec la subvention de l'European Office of the Air Research and Development Command (U. S. A. Air Force) selon le contrat A. F. 61 (514)-634 C. passé avec l'Istituto Nazionale di Ottica.

Ce phénomène fut découvert par MACH [1], et étudié ensuite par de nombreux chercheurs [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], mais personne n'avait fait une étude quantitative de la luminance visuelle.

Le dispositif utilisé est très simple. Une surface blanche diffusante est éclairée par une source rectangulaire uniforme. Un écran opaque E dont un bord rectiligne est parallèle à un des côtés de la source, projette une ombre sur le diffuseur et produit la distribution d'éclairement cherchée.

Pour mesurer la luminance en une région du champ, on projette sur celui-ci plusieurs points lumineux alignés parallèlement à la direction le long de laquelle la luminance est constante (on a préféré adopter cette

méthode plutôt que de projeter un seul point, car dans ce cas, la fixation est plus difficile et moins assurée). Ces points lumineux peuvent se déplacer dans le champ de quantités mesurables, dans la direction de variation de la luminance, et leur luminance varie au moyen d'un coin photométrique. L'observateur rend les points plus brillants que le champ, puis fait diminuer leur luminance, et note le moment exact où ils disparaissent. Les mesures ont été faites en vision binoculaire, par deux observateurs (A. F., M. J.). Les résultats sont représentés par les courbes de la figure 1. On a porté en abscisses la distance angulaire sur le diffuseur en millièmes de radian et, en ordonnées, la luminance des points à l'extinction (en échelle arbitraire). On a dessiné en pointillé la forme objective de la courbe en prenant d'une manière un peu arbitraire, comme niveau supérieur L_1 , la luminance que l'on mesure sur le diffuseur avec le même procédé d'extinction, quand l'écran E est enlevé, et comme niveau inférieur L_0 , la luminance mesurée dans la partie noire du champ loin de la pénombre. Les points S_0 et S_1 ont été déterminés expérimentalement.

Les courbes obtenues montrent qu'avec cette méthode on arrive à donner une description quantita-

tive de la distribution subjective de luminance vue par l'observateur, dans la pénombre et dans la partie claire du champ, mais non dans la partie noire.

C'est une opinion très répandue que la réponse donnée par l'œil, avec une bonne approximation, est une fonction croissante de l'éclairement. Les résultats que l'on vient de rapporter montrent que cette loi n'a pas une valeur générale ; ce ne peut être non plus une loi approchée, car les écarts mesurés sont très sensibles. Il semble que d'autres facteurs interviennent, aussi importants que l'éclairement, notamment le *gradient* d'éclairement et ses variations. A ce propos, il faut remarquer que, jusqu'ici, les auteurs qui ont étudié le phénomène ont insisté surtout sur la présence de la ligne brillante, tandis que, selon notre opinion, il est beaucoup plus important que presque toute la pénombre ait une luminance subjective plus grande que le champ complètement éclairé. On pourrait peut-être supposer que le gradient d'éclairement produit toujours l'effet d'augmenter la luminance, et ce fait pourrait avoir une grande importance dans la vision à travers les instruments d'optique chaque fois qu'il y a de l'œil-de-chat.

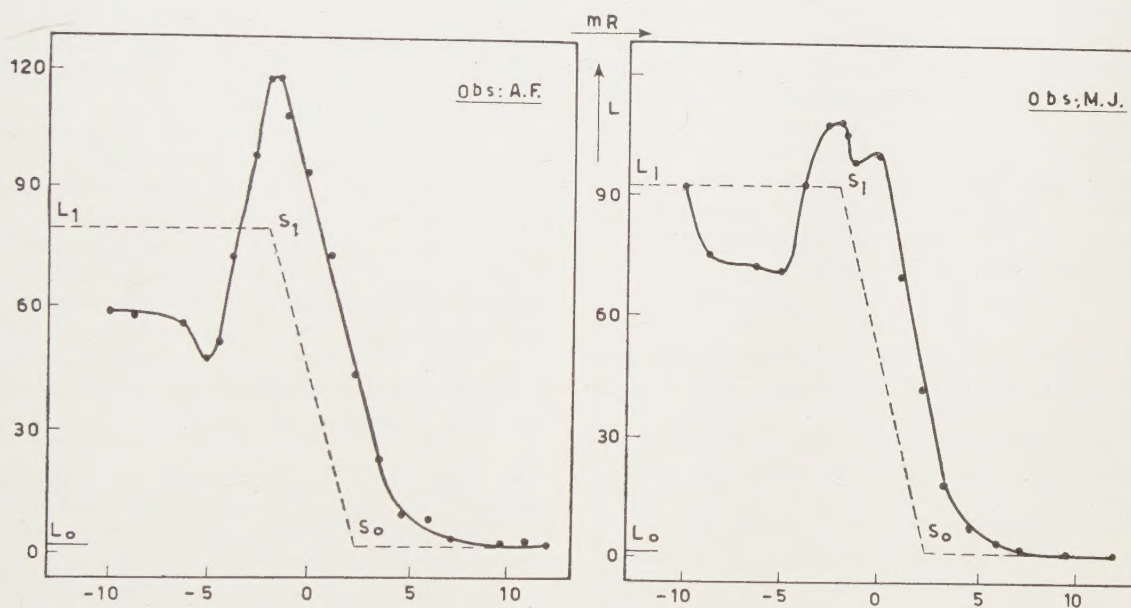


FIG. 1.

RÉFÉRENCES

- [1] E. MACH *Sitzungsber. Wiener Akad. Wiss., Math-Naturwiss. Classe* **52**, 1865, 303 ; **54**, 1866, 131 ; **54**, 1866, 383 ; **57**, 1868, 11 ; *Analyse der Empfindungen* (Jena, 1886).
- [2] W. MC DOUGALL, *Proc. Physiol. Soc.* **1**, 1903, 19.
- [3] R. H. THOULESS, *Brit. J. Psychol.*, **13**, 1922, 310.
- [4] A. KÜHL, *Probleme der Astronomie* (Springer, Berlin, 1924) ; *Phys. Z.* **29**, 1928, 1 ; *Feinwerktechnik* **55**, 1951, 1.
- [5] G. A. FRY & S. H. BARTLEY, *Am. J. Physiol.* **112**, 1935, 414.
- [6] G. A. FRY, *Am. J. Optom. Monograph*, **45**, 1948.
- [7] G. TORALDO DI FRANCA, *Atti Fond. G. Ronchi*, **7**, 1952, 324.
- [8] C. M. GROSSMAN, *The variation in width and position of MACH bands as a function of luminance*, Thèse de Doctorat (Columbia University, 1953).
- [9] A. BIOT, *Comptes Rendus du Colloque de Florence sur les problèmes d'optique moderne* (à paraître).
- [10] A. FIORENTINI, *Comptes Rendus du Colloque de Florence sur les problèmes d'optique moderne* (à paraître).

Congrès International sur les problèmes d'optique moderne. Florence, 10-16 septembre 1954.

(Florence Meeting on Problems in Contemporary Optics)

G. TORALDO DI FRANCIA

Istituto Nazionale di Ottica, Firenze

Un Congrès International sur les Problèmes actuels en Optique a eu lieu à Florence du 10 au 16 septembre ; il était organisé par l'« *Istituto Nazionale di Ottica* » d'Arcetri.

Des travaux des pays suivants ont été présentés : Allemagne, Autriche, Belgique, Danemark, Espagne, Etats-Unis d'Amérique, France, Grande-Bretagne, Inde, Italie, Japon, Hollande, Suisse, Tchécoslovaquie, Yougoslavie. Une soixantaine de communications et 4 rapports d'ensemble ont été présentés.

Comme l'indique le titre du Congrès, celui-ci a été entièrement consacré à l'étude des problèmes nouveaux et d'actualité. Pour la première fois, lors d'une réunion internationale d'Optique, presque tous les problèmes classiques et longtemps débattus ont été délibérément écartés. On a préféré, plutôt que de suivre une voie bien connue, préciser quelques voies nouvelles, ouvertes ces dernières années ; il a donc été traité de questions du domaine de l'Optique pure, mais encore plus de questions soulevées après un heureux rapprochement entre l'Optique et une science ou une technique modernes, rapprochement dans lequel l'apport est réciproque.

La séance inaugurale a eu lieu à la Salle S. Apollonia de l'Université de Florence ; elle fut ouverte par le Commissaire du Gouvernement auprès de l'Institut d'Optique, G. ABETTI qui définit le but du Congrès. La parole fut donnée ensuite à M. VAN HEEL, Président de la Commission Internationale d'Optique et à M. G. POLVANI, Président de la Société Italienne de Physique. M. V. RONCHI, Directeur de l'Institut d'Optique d'Arcetri fit ensuite un exposé sur « *L'Optique de Francesco Maria Grimaldi* », dans laquelle après avoir rappelé la découverte de la diffraction par GRIMALDI, l'auteur exposa les conséquences qui en découlèrent aux siècles suivants, jusqu'au triomphe de la théorie ondulatoire. Les autres séances du Congrès se sont tenues à l'Institut d'Optique.

Les thèmes mis à l'étude étaient les suivants :

Optique et théorie de l'Information. — La théorie de la mesure et de la transmission de l'information, née et développée particulièrement dans le domaine des communications électriques, commence à s'introduire en Optique. Les premières tentatives de leur utilisation faites à des points de vues variés, dans des pays différents, tentatives qu'il est intéressant de confronter, furent présentées.

L'Ecole algéroise de A. BLANC-LAPIERRE et M. PERROT a utilisé les méthodes de l'analyse harmonique et de la radiotechnique pour suggérer un moyen d'améliorer le pouvoir séparateur d'un instrument.

E. H. LINFOOT a étudié la méthode à suivre pour appliquer la théorie de l'information au projet d'un instrument d'optique.

L'Ecole d'Arcetri, avec G. TORALDO et M. T. ZOLI a présenté des considérations théoriques sur la capacité d'un canal optique en présence de bruits de fond et les résultats expérimentaux sur la statistique d'une image considérée comme une source stochastique.

L'Institut d'Optique de Paris, avec A. MARÉCHAL et P. CROCE, a présenté d'intéressants résultats théoriques et expérimentaux sur l'amélioration des détails d'une image obtenue par filtrage optique des fréquences spatiales.

L'Ecole de Besançon a présenté, avec Mlle J. GAULTIER DU MARACHE, des considérations sur la photographie considérée comme filtre de fréquence, et, avec M. DUFFIEUX, des considérations générales sur l'extension de l'espace de fréquence et sur les problèmes qu'il faut poser à la théorie de l'information. P. FELLGETT exposa une utile application de la théorie de l'information à la mesure de la vitesse radiale des étoiles.

Enfin E. INGELSTAM fit un exposé d'ensemble très documenté sur les différentes sortes d'information qu'il faut considérer en optique.

Systèmes non classiques pour la formation des images. — Les systèmes classiques sont les lentilles et les miroirs. Tout récemment ont été découverts ou tout au moins utilisés bien d'autres systèmes. A. C. S. VAN HEEL d'une part et H. H. HOPKINS et N. S. KAPANY d'autre part ont montré des systèmes de formations d'images utilisant des faisceaux de fibres minces transparentes. Une méthode analogue est employée par M. FRANÇON pour la photométrie microscopique. G. TORALDO et LAURA RONCHI ont montré un grand nombre de systèmes optiques de microonde, résultats de la collaboration entre l'Institut d'Optique d'Arcetri et le Centre de Microondes du Conseil de Recherche Italien. En particulier, les nouveaux doublets de « conflexion » ont été présentés ; les participants au Congrès ont pu voir en visitant le Centre de Microondes, une grande partie de ces systèmes en fonctionnement.

Eafin R. C. SPENCER fit un exposé sur les récents progrès obtenus dans l'optique des microondes à l'Air Force Cambridge Research Center.

Trois dimensions et systèmes anamorphoseurs. — Ce sujet, venu à l'ordre du jour tout récemment, pour des raisons pratiques, a soulevé un grand nombre de problèmes théoriques, dans le domaine de l'optique physiologique et psychologique comme dans celui de l'optique géométrique. W. D. WRIGHT a examiné l'importance des divers facteurs tels que la différence des images rétinienne, la convergence, la parallaxe cinématique, etc. dans la perception de la profondeur. A. ARNULF étudia l'application à la projection cinématographique d'un système de photographie en relief. G. FRANKE traita de l'emploi et de la correction des systèmes de prismes anamorphoseurs. A. BOWERS et B. S. BLAISSE présentèrent un système anamorphoseur composé de miroirs.

Surfaces asphériques. — L'emploi des surfaces asphériques dans les instruments d'optique est devenu de plus en plus courant, grâce surtout aux nouvelles méthodes de fabrication. K. W. BRITTAN et J. DEMARCQ présentèrent chacun une machine pour la fabrication en série des surfaces asphériques. R. E. HOPKINS fit un exposé d'ensemble sur les modes de production et sur les conditions théoriques d'emploi des surfaces asphériques dans les instruments d'optique. B. JUREK développa d'autres considérations théoriques.

Problèmes optiques de la télévision. — Il est inutile de souligner l'importance prise par ces problèmes à l'heure actuelle. La collaboration entre les chercheurs de la télévision et les opticiens est de plus en plus nécessaire. H. H. HOPKINS traite la question des objectifs à focales variables dont on connaît le rôle important dans la prise de vue en télévision. E. H. TRAUB analysa les différentes méthodes permettant la transmission de films en télévision. F. I. HAVLICEK exposa une méthode de calculs d'objectifs à grande ouverture. G. TORALDO traita d'une méthode de projection en couleurs. Y. LE GRAND analysa les questions relatives au pouvoir séparateur chromatique requis par la télévision en couleurs. G. A. BOUTRY étudia le comportement de l'œil humain devant la télévision et H. RINIA fit une relation d'ensemble sur les problèmes optiques posés par la télévision.

Problèmes rétinien. — Ce sont en réalité des problèmes classiques, mais ils ont pris ces dernières années une telle importance et ont été considérés de points de vue si nouveaux que l'on peut les traiter comme des problèmes d'actualité.

M. A. BOUMAN exposa les résultats de quelques expériences sur l'interaction dans la vision binoculaire. C. BERGER traita d'un essai de l'interaction

dans la fovéa, obtenu par papillotement. A. KÜHL étudia l'association des éléments rétinien en fonction du pouvoir séparateur. H. SCHÖBER analysa quelques résultats obtenus en employant les anneaux de LANDOLT.

R. GRANIT fit un exposé de grand intérêt sur les effets centrifuges dans la rétine. A. MANFREDI démontra la génération de phosphènes rotatoires dus à l'action de courants alternés et exposa une méthode de sensimétrie visuelle basée sur l'effet psychovoltaique. Une contribution de grande importance fut apportée par W. H. RUSHTON avec la mesure de la variation de densité de la rhodopsine dans les différentes parties de la rétine sous l'influence de la lumière. W. D. WRIGHT traita de l'influence de la lumière diffuse dans les phénomènes d'éblouissement. F. FLAMANT exposa une méthode objective pour l'examen des images rétinien. LUCIA RONCHI montra l'influence des mydriatiques dans l'effet STILES-CRAWFORD. S. S. BALLARD parla des recherches effectuées dans son Laboratoire sur la reconnaissance des objets éloignés. M. AGUILAR et J. OLIVA traitèrent de la distribution des unités sensorielles dans la rétine extrafovéale. J. M. OTERO et J. CASAS traitèrent de la théorie des instruments de nuit. A. BIOT et A. FIORENTINI exposèrent dans deux communications différentes les phénomènes relatifs aux gradients d'illumination sur la rétine. R. W. DITCHBURN exposa une expérience sur l'influence des mouvements oculaires dans la vision. Le même sujet fut traité par A. FIORENTINI et A. M. ERCOLE mais avec une méthode différente. E. INGELSTAM fit un exposé sur la structure microscopique des récepteurs rétinien et sur l'éventuelle interprétation électrique. A. IVANOFF présenta une étude sur les actions réflexes de la rétine sur la dioptrique oculaire.

Questions diverses. — Bien que le Congrès ait été explicitement consacré aux sujets indiqués ci-dessus, les communications sur divers sujets de l'Optique, présentant un intérêt particulier, n'en ont cependant pas été exclues. J. W. PERRY parla de monochromateurs ; D. RICHARDSON, de réseaux de diffraction ; A. C. S. VAN HEEL, de la récente éclipse solaire et de doublets à un rayon de courbure ; F. GABLER, sur le contraste de phase ; J. PICT de la réflexion totale ; W. FRANZ, de la diffraction ; C. MORAIS, de l'application du calcul homographique au calcul optique ; A. ARNULF, O. DUPUY et F. FLAMANT, du système optique de l'œil ; M. FRANÇON, de l'examen interférométrique des états de surface ; H. H. HOPKINS, des images de diffraction et des images des objets incohérents ; M. M. CORRIAS, du calcul des doublets.

C'est le Professeur J. M. OTERO qui présenta, en conclusion, les observations et les résultats que l'on pouvait attendre du Congrès.

A l'occasion du Congrès avaient été organisées différentes manifestations : visite de la ville, de la Galerie des Offices avec éclairage de nuit, dîners officiels,

cocktail et en dernier lieu une journée à Lucca, Forte dei Marmi et Pise.

En tant que participant au Colloque, je suis heureux d'ajouter quelques mots au sommaire précédent, qui ne mentionne que les faits saillants et ne peut évoquer l'atmosphère d'amitié cordiale que tous les assistants ont goûtée. Ceux-ci ont emporté les souvenirs les plus agréables de ce contact avec de nombreux amis opti-

ciens venus de presque toutes les parties du monde, contact renoué dans une ambiance dont la tradition profonde de culture nous a remplis de joie et d'admiration. Les organisateurs florentins du Colloque ont toute raison de se féliciter du succès de cette réunion à laquelle ils ont apporté tant de soin qu'elle restera mémorable pour tous ceux qui y ont participé.

A. C. S. VAN HEEL.